Horst Schallenberg

Einige Anwendungsbeispiele der dynamischen Programmierung im Rahmen der Produktionsplanung

1971

EINIGE ANWENDUNGSBEISPIELE DER DYNAMISCHEN PROGRAMMIERUNG IM RAHMEN DER PRODUKTIONSPLANUNG

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Wirtschaftswissenschaft
durch den
Fachbereich Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
der Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster

vorgelegt von
Diplom-Kaufmann
Horst Schallenberg
aus Osnabrück
1971

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Erster Berichterstatter : Prof. Dr. Josef B l e y m ü l l e r
Zweiter Berichterstatter: Prof. Dr. Herbert G ü l i c h e r
Dekan: Prof. Dr. Josef B l e y m ü l l e r
Tag der mündlichen Prüfung: 4. Februar 1971

Inhaltsverzeichnis:

Seite

1 Einführung

1.1 Aufgabe und Konzeption der Untersuchung 1
1.2 Die Untersuchung als Teilproblem der Planung 4

2 Die Analyse der Plandeterminanten im Bereich der Leistungserstellung 8

2.1 Wesen und Teilbereiche der Produktionsplanung 8

2.2 Die Einflußgrößen der Produktionsplanung 10

2.2.1 Die betriebspolitisch bedingten Einflußgrößen der Produktionsplanung 10

2.2.2 Die absatz- und lagerpolitisch bedingten Einflußgrößen der Produktionsplanung 13

2.2.3 Die produktionspolitisch bedingten Einflußgrößen der Produktionsplanung 18

3 Die Elemente der dynamischen Programmierung 26

3.1 Das Optimalitätsprinzip von Richard Bellman 26

3.2 Die Voraussetzungen der dynamischen Programmierung 27

Seite

3.3 Allgemeine Formulierung des Lösungsweges 31

3.4 Die Berechnung eines Zahlenbeispiels 39

4 Ausgewählte Anwendungsbeispiele der dynamischen Programmierung im Rahmen der Produktionsplanung 46

4.1 Ein spezielles Produktionsplanungsproblem 46

4.2 Produktionsplanung und Lagerhaltung 53

4.2.1 Das Modell von WAGNER und WHITIN 53

4.2.2 Das Modell von SHEPHARD 61

4.2.2.1 Das Lösungsverfahren von LANDAU 86

4.2.3 Das Modell von ELSNER 89

4.2.4 Das Modell von KÜNZI 96

4.3 Ein Produktionsreihenfolgeproblem 104

5 Erweiterte Entscheidungsmodelle zur Bestimmung des optimalen Produktionsplans 113

5.1 Erstes Modell: Einproduktbetrieb mit einstufiger Fertigung 113

5.1.1 Die Voraussetzungen des Modells 113

5.1.2 Lösungsansatz und optimale Entscheidung 119

Seite

5.2 Zweites Modell: Einproduktbetrieb mit mehrstufiger Fertigung 138

5.2.1 Die Voraussetzungen des Modells 138

5.2.2 Lösungsansatz und optimale Entscheidung 140

5.3 Drittes Modell: Mehrproduktbetrieb mit einstufiger Fertigung 151

5.3.1 Die Voraussetzungen des Modells 151

5.3.2 Lösungsansatz und optimale Entscheidung 153

5.4 Viertes Modell: Mehrproduktbetrieb mit mehrstufiger Fertigung 164

5.4.1 Die Voraussetzungen des Modells 164

5.4.2 Lösungsansatz und optimale Entscheidung 165

6 Zusammenfassung 173

Symbolverzeichnis

Literaturverzeichnis

Anhang 1*

Verzeichnis der Abbildungen I

Verzeichnis der Tabellen III

Verzeichnis der Abbildungen im Anhang IX

Verzeichnis der Tabellen im Anhang X

Verzeichnis der Abbildungen

Seite

Abbildung 1: Schematische Darstellung eines mehrstufigen Entscheidungsproblems mit Hilfe eines Netzwerkes. 32

Abbildung 2: Bestimmung der relativen Optima bei vorwärtsschreitender Optimierung. 34

Abbildung 3: Bestimmung der relativen Optima bei rückwärtsschreitender Optimierung. 35

Abbildung 4: Schematische Darstellung der mit Hilfe der dynamischen Programmierung ermittelten relativen Optima eines mehrstufigen Entscheidungsproblems (vgl. Abbildung 1). 36

Abbildung 5: Bestimmung der minimalen variablen Kosten mit Hilfe der dynamischen Programmierung durch die vorwärtsschreitende Optimierung. 42

Abbildung 6: Bestimmung der minimalen variablen Kosten mit Hilfe der dynamischen Programmierung durch die rückwärtsschreitende Optimierung. 44

Abbildung 7: Graphische Darstellung der verschiedenen Ablaufmöglichkeiten in den nächsten beiden Jahren, die der Computerproduzent berücksichtigen muß. 48

Abbildung 8: Bestimmung der minimalen variablen Kosten mit Hilfe der dynamischen Programmierung für sämtliche theoretisch möglichen Zustände der nächsten beiden Jahre. 50

Seite

Abbildung 9: Lösungsschema für das Zahlenbeispiel von D. OHSE. 59

Abbildung 10: Verlauf der variablen Produktionskosten innerhalb eines Zeitabschnittes. 64

Abbildung 11: Graphische Darstellung der Lagerhaltungskosten und der Grenzkosten der Produktion. 92

Abbildung 12: Graphische Darstellung der in Tabelle 18 angegebenen Kostenfunktionen. 94

Abbildung 13: Graphische Darstellung der entsprechenden Grenzkostenkurven. 95

Abbildung 14: Graphische Darstellung der gesamten Durchlaufzeit für m verbleibende Werkstücke. 105

Abbildung 15: Graphische Darstellung der Durchlaufzeit des Produktes i für $t > a_i$ und $t < a_i$. 105

Abbildung 16: Graphische Darstellung der Durchlaufzeit für die Produkte i und j. 106

Abbildung 17: Graphische Darstellung der minimalen Durchlaufzeit für sämtliche Produkte. 111

Abbildung 18: Graphische Darstellung der variablen Produktionskosten für verschiedene Anpassungsarten bei dem Aggregat j. 117

Abbildung 19: Verlauf der variablen Produktionskosten in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge für das Aggregat j unter Einhaltung der jeweils kostengünstigsten Anpassungsart. 118

Verzeichnis der Tabellen

Seite

Tabelle 1: Monatliche Nachfrage für den Planungszeitraum von Januar bis Mai. 55

Tabelle 2: Nachfrage für die Perioden 1 bis 6. 61

Tabelle 3: Variable Produktions- und Lagerhaltungskosten während der 5. und 6. Periode (in 1.000 Dollar). 69

Tabelle 4: Minimale variable Produktions- und Lagerhaltungskosten während der 5. und 6. Periode für die verschiedenen möglichen Werte des Lagers zu Beginn der 5. Periode (in 1.000 Dollar). 70

Tabelle 5: Variable Produktions- und Lagerhaltungskosten für die Perioden 4 bis 6 (in 1.000 Dollar). 73

Tabelle 6: Minimale variable Produktions- und Lagerhaltungskosten während der 4., 5. und 6. Periode für die verschiedenen möglichen Werte des Lagers zu Beginn der 4. Periode (in 1.000 Dollar). 75

Tabelle 7: Variable Produktions- und Lagerhaltungskosten für die Perioden 3 bis 6 (in 1.000 Dollar). 77

Tabelle 8: Minimale variable Produktions- und Lagerhaltungskosten während der 3., 4., 5. und 6. Periode für die verschiedenen möglichen Werte des Lagers zu Beginn der 3. Periode (in 1.000 Dollar). 78

Seite

Tabelle 9: Variable Produktions- und Lagerhaltungskosten für die Perioden 2 bis 6 (in 1.000 Dollar). 80

Tabelle 10: Minimale variable Produktions- und Lagerhaltungskosten während der 2., 3., 4., 5. und 6. Periode für die verschiedenen möglichen Werte des Lagerbestandes zu Beginn der 2. Periode (in 1.000 Dollar). 81

Tabelle 11: Variable Produktions- und Lagerhaltungskosten für alle 6 Perioden (in 1.000 Dollar). 83

Tabelle 12: Optimaler Produktionsplan für den gesamten Planungszeitraum. 84

Tabelle 13: Optimale Reihenfolge der Arbeitsschichten für die Aufteilung der nachgefragten Menge einer Periode auf die noch freien Produktionskapazitäten. 87

Tabelle 14: Schematische Darstellung für die Bestimmung des optimalen Produktionsplans. 87

Tabelle 15: Nachfrage für die Perioden 1 bis 6. 89

Tabelle 16: Optimaler Produktionsplan für den gesamten Planungszeitraum. 91

Tabelle 17: Bestimmung des optimalen Produktionsplans. 93

Tabelle 18: Zusammenfassung der optimalen Produktionspläne für verschiedene Kostenfunktionen. 94

Tabelle 19: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Nachfrage. 100

Seite

Tabelle 20: Darstellung der optimalen Produktionsmengen in Abhängigkeit von der Fertigungsmenge und dem Lagerbestand der vorhergehenden Periode. 102

Tabelle 21: Übersicht über die für das herzustellende Produkt erforderlichen Angaben hinsichtlich der technischen Beschaffenheit der Maschinen 1 bis 6 und der entsprechenden Kostenentwicklung. 115

Tabelle 22: Optimale Aufteilung der einzelnen Anpassungsarten für die Maschinen 1 bis 6. 120

Tabelle 23: Variable Produktionskosten in Abhängigkeit von der Fertigungsmenge für die Maschinen 1 und 2. 121

Tabelle 24: Bestimmung der minimalen variablen Produktionskosten für X = 2. 122

Tabelle 25: Bestimmung der minimalen variablen Produktionskosten für X = 3. 122

Tabelle 26: Minimale variable Produktionskosten der ersten beiden Anlagen und variable Produktionskosten der dritten Anlage in Abhängigkeit von X. 123

Tabelle 27: Bestimmung der minimalen variablen Herstellungskosten in Abhängigkeit von X für 6 verschiedene Aggregate. 127

Tabelle 28: Bestimmung des optimalen Einsatzes für 6 verschiedene Aggregate bei einer Gesamterzeugung von 1800 ME. 129

Seite

Tabelle 29: Darstellung der bei einer Gesamterzeugung von 1800 ME geltenden kostengünstigsten Anpassungsarten für die Aggregate 1 bis 6. 131

Tabelle 30: Bestimmung der gewinnmaximalen Produktionsmenge für P = 85,- DM und P(X) = 120-0,01 X. 133

Tabelle 31: Darstellung der gewinnmaximalen Lösungen für verschiedene konstante Preise und Preisabsatzfunktionen. 134

Tabelle 32: Darstellung der gewinnmaximalen Lösungen für verschiedene konstante Preise und Preisabsatzfunktionen unter Berücksichtigung von Ausschußfaktoren. 135

Tabelle 33: Übersicht über die für das herzustellende Produkt erforderlichen Angaben hinsichtlich der technischen Beschaffenheit der Maschinen in der zweiten und dritten Bearbeitungsstufe und der entsprechenden Kostenentwicklung. 139

Tabelle 34: Optimale Aufteilung der Anpassungsarten für die Maschinen der zweiten und dritten Bearbeitungsstufe. 141

Tabelle 35: Bestimmung der minimalen variablen Herstellungskosten in Abhängigkeit von X für die zweite und dritte Bearbeitungsstufe. 143

Tabelle 36: Bestimmung des optimalen Einsatzes für die Aggregate der zweiten und dritten Bearbeitungsstufe bei einer Gesamterzeugung von 1800 ME. 144

Seite

Tabelle 37: Darstellung der bei einer Gesamterzeugung von 1800 ME geltenden kostengünstigsten Anpassungsarten für die Maschinen der zweiten und dritten Bearbeitungsstufe. 146

Tabelle 38: Bestimmung der gewinnmaximalen Produktionsmenge für P = 145,- DM und P(X) = 170-0,02 X. 148

Tabelle 39: Darstellung der gewinnmaximalen Lösungen für verschiedene konstante Preise und Preisabsatzfunktionen. 149

Tabelle 40: Übersicht über die Determinanten des Produktions- und Absatzbereiches für 4 verschiedene Erzeugnisse. 152

Tabelle 41: Bestimmung der Kosten und Erlöse für 4 verschiedene Erzeugnisse in Abhängigkeit von der Fertigungszeit. 155

Tabelle 42: Bestimmung des maximalen Deckungsbeitrags in Abhängigkeit von der Produktionszeit für 4 verschiedene Erzeugnisse. 158

Tabelle 43: Bestimmung der optimalen Produktionszeit für 4 verschiedene Erzeugnisse. 159

Tabelle 44: Bestimmung der gewinnmaximalen Fertigungsmengen und Preise der verschiedenen Produkte. 162

Tabelle 45: Übersicht über die Determinanten des Produktions- und Absatzbereichs für 4 verschiedene Erzeugnisse. 165

Seite

Tabelle 46: Bestimmung der Kosten und Erlöse für 4 verschiedene Erzeugnisse in Abhängigkeit von der Fertigungszeit der Engpaßstufe. 167

Tabelle 47: Bestimmung des maximalen Deckungsbeitrags in Abhängigkeit von der Produktionszeit der Engpaßstufe für 4 verschiedene Erzeugnisse. 169

Tabelle 48: Bestimmung der optimalen Fertigungszeit in der Engpaßstufe für 4 verschiedene Erzeugnisse. 170

Tabelle 49: Bestimmung der gewinnmaximalen Fertigungsmengen und Preise der verschiedenen Produkte. 171

Verzeichnis der Abbildungen im Anhang

		Seite
Abbildung 1*:	Flußdiagramm für die Modelle 1 und 2	1*
Abbildung 2*:	Flußdiagramm für die Modelle 3 und 4	7*

Verzeichnis der Tabellen im Anhang

Seite

Tabelle 1*: FORTRAN IV-Programm zum 2. Modell (vgl. Abschnitt 5.2) 2*

Tabelle 2*: FORTRAN IV-Programm zum 4. Modell (vgl. Abschnitt 5.4) 8*

1 Einführung

1.1 Aufgabe und Konzeption der Untersuchung

Die betriebliche Planung dient der Durchsetzung unternehmerischer Zielvorstellungen. Ihre Qualität entscheidet über Erfolg oder Mißerfolg künftiger Prozesse. Der Planende muß deshalb bestrebt sein, ein möglichst hohes Planungsniveau zu erreichen.

Die Verwirklichung dieser Forderung setzt folgende Maßnahmen voraus:

1. Die Erfassung und richtige Einschätzung aller auftretenden Einflußfaktoren
2. Die Anwendung eines Verfahrens, das den objektiven Vergleich dieser Größen ermöglicht

Die Realisierung dieser Voraussetzungen bereitet in der Praxis erhebliche Schwierigkeiten.

Die Vorstellungskraft des Planenden bestimmt weitgehend, welche Faktoren Eingang in die Untersuchung finden. Je exakter künftige Abläufe antizipiert werden, desto vollständiger wird der Katalog der Einflußgrößen. Eine lückenlose Erfassung der relevanten Daten gelingt im allgemeinen jedoch nicht, da die Auswahl aus einer meist unübersehbaren Fülle von möglichen Faktoren getroffen werden muß. Eine Einengung dieses Datenkreises läßt sich nur dadurch erreichen, daß die Gesamtplanung in Teilplanungen aufgespalten wird.[1] Damit vermindert sich aber generell auch die Aussagekraft der Ergebnisse hinsichtlich des Gesamtziels. Nur unter stark einschränkenden Voraussetzungen ist die Lösung eines Teilbereichs mit der besten Gesamtlösung identisch.[2]

---

1) Vgl. K.MELLEROWICZ, Planung und Plankostenrechnung, Bd.I, Betriebliche Planung, Freiburg 1961, S.122 ff.
2) Vgl. S. 6

Ein anderes Problem ist die richtige Bewertung der Bestimmungsgrößen. Eine Reihe von betrieblichen und außerbetrieblichen Faktoren lassen sich hinsichtlich ihres Wirkungsgrades nur ungenau erfassen. Werden z.B. in der Planungsperiode Maschinendefekte erwartet, so müßte eine exakte Antizipation der Stillstandzeiten erfolgen. Ihre Ursachen sind jedoch so vielschichtiger Natur, daß sie nur als "zufällige Ereignisse"[1] in die Planung eingehen können. Mit Hilfe der statistischen Schätzverfahren[2] muß dann ein Näherungswert ermittelt werden.

Ebenso kompliziert ist der Vergleich der Bestimmungsgrößen. Hier bedient man sich vornehmlich mathematischer Verfahren. Im Rahmen des Operations Research sind einige Methoden entwickelt worden, von denen die linearen[3] und nichtlinearen[4] Programmierungsansätze besondere Beachtung gefunden haben. Vor allem das von Richard Bellman entwickelte Verfahren der dynamischen Programmierung[5] eignet sich besonders zur Lösung verschiedener komplexer Systeme.

Die Anwendung dieser mathematischen Verfahren setzt jedoch voraus, daß sich die eingehenden Größen zahlenmäßig erfassen lassen. Bei quantitativen Ausprägungen läßt sich diese Bedingung leicht erfüllen. Liegen je-

---

1) Vgl. M.FISZ, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, 2. unveränderte Aufl., S.3 ff.; J.PFANZAGL, Allgemeine Methodenlehre der Statistik, Bd. II, Sammlung Göschen, Berlin 1962, S.7; K.OPFERMANN, Zum Problem der kostenoptimalen Zuverlässigkeit produktiver Systeme, Dissertation Münster 1968, S.31

2) J.PFANZAGL, Allgemeine Methodenlehre der Statistik, Bd. II, Sammlung Göschen, Berlin 1962; E.KREYSZIG, Statistische Methoden und ihre Anwendungen, Göttingen 1965

3) G.B.DANTZIG, Linear Programming and Extensions, Princeton 1963; H.C.JOKSCH, Lineares Programmieren, Tübingen 1962, S.173 ff.

4) H.P.KÜNZI, W.KRELLE, Nichtlineare Programmierung, Heidelberg-Göttingen-Berlin 1962, S.55 ff.; G.HADLEY, Nichtlineare und dynamische Programmierung, Würzburg-Wien 1969

5) R.BELLMAN, Dynamic Programming, 4. Aufl., Princeton, New Jersey 1965; R.BELLMAN und S.E.DREYFUS, Applied Dynamic Programming, Princeton, New Jersey 1962

doch Faktoren mit qualitativen Merkmalen vor, so muß zunächst ein Maßstab gefunden werden, der die Rangfolge der Ausprägungen zahlenmäßig verdeutlicht. Werden z.B. auf einer Mehrzweckanlage verschiedene Produkte hergestellt, so könnten diese durch variable Kosten, Produktionszeiten, Deckungsbeiträge oder andere Größen geordnet werden.

Die Gegenüberstellung mehrerer Faktoren verlangt weiterhin, daß alle Größen auf eine gemeinsame Dimension zurückgeführt werden können. So lassen sich z.B. die Kapazitäten verschiedener Anlagen nur dann vergleichen, wenn sie in Produkteinheiten eines bestimmten Artikels ausgedrückt werden.

Neben diesen Voraussetzungen müssen auch die Bedingungen eingehalten werden, die von den mathematischen Verfahren gesetzt sind. Insbesondere sei hier an die Simplexmethode erinnert, die Linearität der Interdependenzen unterstellt.

In dieser Arbeit soll untersucht werden, wie weit sich die dynamische Programmierung als Lösungsverfahren für Probleme der Produktionsplanung eignet.

Im zweiten Abschnitt werden die Faktoren analysiert, die entscheidenden Einfluß auf das Produktionsergebnis ausüben können. Sie werden danach charakterisiert, ob sie die genannten Voraussetzungen - die numerische Ordnung und die einheitliche Dimensionierung - erfüllen können. Die Gliederung der Produktionsplanung folgt dabei weitgehend den von Mellerowicz[1] gemachten Ausführungen.

Im dritten Abschnitt wird das Verfahren der dynamischen Programmierung diskutiert. Im Vordergrund der Analyse stehen die Bedingungen, die bei Anwendung dieser Methode vorliegen müssen. Ein allgemeiner

---

1) K.MELLEROWICZ, a.a.O., S.270 ff.; vgl. auch G.ABROMEIT, Erzeugnisplanung und Produktionsprogramm im Lichte der Produktions-, Absatz- und Wettbewerbspolitik, Wiesbaden 1955, S.68 ff.

Lösungsansatz soll die Funktionsweise der dynamischen Programmierung verdeutlichen.

Im vierten Abschnitt folgen einige Anwendungsbeispiele aus der Literatur. Die Auswahl dieser Modelle richtete sich einerseits nach der unterschiedlichen Fragestellung und andererseits nach der Verwendung wesensverschiedener Lösungsansätze der dynamischen Programmierung.

Im fünften Abschnitt werden vier Modelle dargestellt, die sich von den oben genannten vornehmlich durch die Fragestellung und den Anwendungsbereich unterscheiden. Die ersten beiden Planungsaufgaben befassen sich mit einstufiger und mehrstufiger Fertigung im Einproduktbetrieb. Die Modelle drei und vier berücksichtigen ein- und mehrstufige Fertigung in Mehrproduktunternehmungen.[1)]

1.2 Die Untersuchung als Teilproblem der betrieblichen Planung

Die Aufgabe dieser Arbeit muß als Teilproblem der Planung verstanden werden. Deshalb scheint es angebracht, zunächst eine Abgrenzung des Untersuchungsziels zum gesamten Planungsbereich vorzunehmen.

Nach Gutenberg[2)] bedeutet Planung, "das von der Geschäfts- und Betriebsleitung Gewollte in die rationalen Formen betrieblichen Vollzugs umzugießen."
"Die betriebliche Planung kann somit als Entwurf einer Ordnung der sich künftig vollziehenden Betriebsprozesse nach wirtschaftlichen Kriterien unter Berücksichtigung der zwischen den einzelnen Prozessen oder Aufgaben existierenden Zusammenhänge definiert werden."[3)]

---

1) Alle Modelle wurden im Rechenzentrum der Wilhelms-Universität in Münster auf einer IBM Anlage 360/50 durchgerechnet. Die Programme liegen im Institut für Ökonometrie und Wirtschaftsstatistik der Universität Münster vor. Zur Verdeutlichung sind im Anhang dieser Arbeit die entsprechenden Flußdiagramme angegeben. Vgl. S. 1 ff.

2) E.GUTENBERG, Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Bd.I, Die Produktion, 15. Auflage, Berlin-Heidelberg-New York 1969, S.147

3) D.ADAM, Produktionsplanung bei Sortenfertigung, Wiesbaden 1969, S.17; vgl. auch T.ELLINGER, Ablaufplanung, Stuttgart 1959, S.13-14

Daraus lassen sich drei Elemente der Planung ableiten:[1]

1) das Entscheidungskriterium
2) der Entscheidungsbereich
3) die Aktionsparameter

Entscheidungskriterium der betrieblichen Planung ist das ökonomische Ziel. Es kann einfacher und komplexer Natur sein. Einfache Zielsetzungen sind z.B. Gewinn- oder Umsatzmaximierungen. Werden mehrere Ziele gleichzeitig verfolgt, so liegt eine komplexe Zielsetzung vor.[2] Der Unternehmer kann bestrebt sein, den Gewinn unter Aufrechterhaltung eines bestimmten Marktanteils zu maximieren oder das Absatzmaximum mit einem angemessenen Gewinn zu kombinieren.

Die Planungsmodelle dieser Arbeit gehen ausschließlich von der (einfachen) Zielsetzung der Gewinnmaximierung aus. Deshalb soll hier auf eine ausführliche Darstellung der Zielfunktionen verzichtet werden.[3]

Der Entscheidungsbereich wird durch eine Vielzahl von inner- und außerbetrieblichen Faktoren festgelegt.[4] Zu ihnen gehören die Begrenzungen aller Funktionsbereiche eines Betriebes.

Damit wird deutlich, daß eine Planung nur dann Erfolg haben kann, wenn alle Teilgebiete in die Analyse einbezogen werden. Eine Produktionsplanung ohne Berücksichtigung der Beschaffungs-, Absatz- oder Finanzierungsseite führt nur in Ausnahmefällen zur besten Verwirklichung des angestrebten Ziels. Durch das "Ausgleichsgesetz der Planung"[5] rückt jedoch der Engpaßsektor in den Vordergrund der Überlegungen. Die gesamte Planung wird von diesem Bereich am stärksten

---

1) Vgl. D.ADAM, a.a.O., S.18 ff.
2) Vgl. H.JACOB, Preispolitik, Wiesbaden 1963, S.17 ff.
3) H.KOCH, Betriebliche Planung, Wiesbaden 1961, S.15 ff.
   E.HEINEN, Das Zielsystem der Unternehmung, Wiesbaden 1966, S.59 ff.
4) Vgl. D.ADAM, a.a.O., S.19
5) E.GUTENBERG, a.a.O., S.162

beeinflußt. Je nach Minimumsektor spricht Mellerowicz[1] deshalb von absatz-, gewinn-, kapazitäts- oder beschaffungsdeterminierter Planung. Mit steigendem Planungsspielraum der übrigen Bereiche nimmt ihr Einfluß auf das Planungsergebnis ab. Verhält sich ein Sektor gegenüber allen möglichen Lösungswegen des Engpaßbereiches völlig neutral, so kann er unberücksichtigt bleiben. Das ist die Voraussetzung dafür, daß die Planung, die nicht alle Bereiche erfaßt, dennoch zur Auswahl der besten Alternative führt.

In der Praxis ergibt sich diese Situation am häufigsten für kurz- und mittelfristige Planungen. Bei langfristigen Planungen kommt ein zweiter Gesichtspunkt des "Ausgleichsgesetzes" zum Zuge.[2] Die Unternehmensführung muß bestrebt sein, den Minimumsektor auf das Niveau der übrigen Bereiche anzuheben. Neuinvestitionen und Kapitalbeschaffungen sind in der Regel die Folge.

Die im Abschnitt 5 dargestellten Planungsbeispiele sind kurzfristiger Natur und beziehen sich auf die Sphäre der Leistungserstellung unter Beachtung absatzbedingter Restriktionen. Finanzierungen und Investitionen bleiben unberücksichtigt. Ebenso stellt die Beschaffung von Werkstoffen und Arbeitskräften keinen Engpaß dar.

Sofern die begrenzenden Daten konkrete Werte annehmen, läßt sich die Planung verhältnismäßig leicht durchführen. Da sie jedoch in die Zukunft gerichtet ist, muß sie auch künftige Erwartungen berücksichtigen. Je länger der Planungszeitraum wird, desto unsicherer werden die Aussagen z.B. über Preise, Absatzmengen oder Marktverhältnisse. Entscheidungen unter Unsicherheit können schließlich das gesamte Planungsergebnis in Frage stellen.

---

1) K.MELLEROWICZ, a.a.O., S.125
2) E.GUTENBERG, a.a.O., S.164

In dieser Untersuchung bleibt das Problem der Unsicherheit weitgehend unberücksichtigt.[1] Lediglich einige Modelle im vierten Kapitel versuchen diesem Phänomen dadurch zu begegnen, daß sie an Stelle von deterministischen Größen stochastische Werte[2] in den Lösungsansatz aufnehmen.

Die Aktionsparameter ermöglichen schließlich dem Planenden unter Beachtung der Zielsetzung innerhalb des Entscheidungsbereiches die Art und Richtung eines künftigen Ablaufs positiv zu beeinflussen. Dabei müssen die Werte der Variablen so gesetzt werden, daß die Zielvorstellung am besten verwirklicht wird.

In den Modellen des Abschnittes 5 treten z.B. Produktionszeiten, Mengen und Preise als Aktionsparameter auf. Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß diese Größen auch als Daten in die Untersuchung eingehen können. Letztlich hängt es nur von der Problemstellung ab, ob eine Bestimmungsgröße als Datum oder als Aktionsparameter eingesetzt werden muß.

---

1) Die Erwartungen lassen sich nach dem Sicherheitsgrad in sichere, Risiko- und unsichere Erwartungen aufspalten. Vgl. H.ALBACH, Wirtschaftslichkeitsrechnung bei unsicheren Erwartungen, Köln-Opladen 1959, S.3 u. 16 ff.; H.KOCH, zur Diskussion in der Ungewißheitstheorie, ZfhF 1960, S.49-75; ders., Betriebliche Planung, a.a.O., S.107 ff.; F.KNIGHT, Risk, Uncertainty and Profit, New York 1964, S.197 ff.

2) D.J.WHITE, Dynamic Programming, Edinburgh und London 1969, S.25; R.HOWARD, Dynamische Programmierung und Markov-Prozesse, Deutsche Bearbeitung von H.P.KÜNZI und P.KALL, Zürich 1965, S.5 ff.

2 Die Analyse der Plandeterminanten im Bereich der Leistungserstellung

2.1 Wesen und Teilbereiche der Produktionsplanung

Die Produktionsplanung legt fest, welche Artikel und Mengen im Planungszeitraum hergestellt werden.[1] Sie entscheidet, wann die Produktion beginnt und welche der verfügbaren Werkstoffe, Betriebsmittel und Arbeitskräfte eingesetzt werden sollen. Sie beantwortet die Frage nach dem "Was", "Wieviel", "Wo", "Wann" und "Wie" der Produktion.[2]

Dieser Bereich läßt sich in zwei Ebenen aufspalten:[3]

1) Die Programmplanung
2) Die Prozeßplanung

Die Programmplanung tendiert zur Grobplanung. Sie wählt unter Berücksichtigung der Absatzmöglichkeiten die Artikel aus, die in das Produktionsprogramm aufgenommen werden sollen. Daneben bestimmt sie die Produktionsmengen dieser Erzeugnisse. Adam[4] spricht von "qualitativer" und "quantitativer Programmplanung". Außerdem gehört es zu ihrer Aufgabe, die Verteilung von Art und Menge auf die verfügbaren Produktionsstätten festzulegen. Damit bildet sie die Grundlage zur Prozeßplanung.

Das Ziel der Prozeßplanung besteht darin, den Produktionsablauf der vorgegebenen Menge zeitlich so zu gestalten, daß unter Einhaltung der Absatztermine die unternehmerische Zielvorstellung - die Gewinnmaximierung - realisiert wird. Diese Aufgabe läßt sich in eine Bereitstellungs- und Ablaufplanung gliedern.[5] Zunächst muß dafür gesorgt werden, daß die

---

1) Vgl. D.ADAM, a.a.O., S.22; K.MELLEROWICZ, a.a.O., S.270; T.ELLINGER, a.a.O., S.14
2) K.MELLEROWICZ, a.a.O., S.270
3) Vgl. T.ELLINGER, a.a.O., S.14; E.GUTENBERG, Planung im Betrieb, ZfB 1952, S.677 u. 681; K.MELLEROWICZ, a.a.O., S.270
4) Vgl. D.ADAM, a.a.O., S.23
5) Vgl. T.ELLINGER, a.a.O., S.14; K.MELLEROWICZ, a.a.O., S.280

Produktionsfaktoren - Werkstoffe, Betriebsmittel und Arbeitskräfte - rechtzeitig in der benötigten Quantität und Qualität am Bearbeitungsort vorhanden sind. In der Ablaufplanung wird über den Beginn der Produktion entschieden. Handelt es sich um eine mehrstufige Fertigung, bei der die Reihenfolge der Arbeitsgänge durch die Erzeugnisse fest vorgegeben wird, so muß der Produktionsablauf ermittelt werden, der die kostengünstigste Durchlaufzeit[1] der Fertigungsaufträge realisiert. Ein anderes Problem der Ablaufplanung ist die Abstimmung der Produktionsendtermine mit den Absatzterminen.[2] Das Ziel besteht darin, die Produktionstermine so festzulegen, daß die einzelnen Aufträge bis zum Absatzzeitpunkt mit den geringsten Produktions- und Lagerkosten hergestellt werden.

Im Gegensatz zur Programmplanung steht bei der Prozeßplanung das Zeitproblem im Vordergrund.[3] Gerade die Planung der zeitlichen Ordnung im Rahmen der Produktionsmöglichkeiten unter Einhaltung der Absatztermine muß als wesentlicher Teilbereich der Produktionsplanung verstanden werden. Eine isolierte Betrachtung der einzelnen Planungsebenen würde jedoch nicht zur besten Realisierung des Gesamtplans führen. Vielschichtige Interdependenzen charakterisieren den Zusammenhang dieser Planungsgebiete. Eine Ablaufplanung kann nur aufgestellt werden, wenn ein Programm vorgegeben wird und die Bereitstellung der Produktions-

---

1) Als Durchlaufzeit wird die Zeitspanne zwischen dem Produktionsbeginn eines Auftrages in der ersten Fertigungsstufe und der vollständigen Fertigstellung in der letzten Stufe bezeichnet. Vgl. T.ELLINGER, a.a.O., S.109; E.GUTENBERG, Grundlagen..., Die Produktion, a.a.O., S.214; GUTENBERG, spricht in diesem Zusammenhang vom "Dilemma der Ablaufplanung"; vgl. auch K.F.BUSSMANN und P.MERTENS, Operations Research und Datenverarbeitung bei der Produktionsplanung, Stuttgart 1968, S.217; K.HOSS, Fertigungsablaufplanung mittels operationsanalytischer Methoden unter besonderer Beachtung des Ablaufdilemmas in der Werkstattfertigung, in: Unternehmensforschung für die Wirtschaftspraxis, Bd. 6, Würzburg 1965, S.45

2) Vgl. D.ADAM, a.a.O., S.24

3) Deshalb ließe sich auch eine Gliederung in statische und dynamische Produktionsplanung rechtfertigen; vgl. D.ADAM, a.a.O., S.22 ff.

faktoren gesichert ist. Andererseits ist eine Programmplanung nur dann sinnvoll, wenn die vorgegebenen Artikel und Mengen im Planungszeitraum mit den vorhandenen Produktionsfaktoren hergestellt werden können. Die einzelne Planungsebene bildet eine Grundlage, Ergänzung oder Verfeinerung der übrigen Bereiche der Produktionsplanung. Es handelt sich also um ein System von Planungsproblemen, das durch wechselseitige Abhängigkeiten und Überlappungen eng miteinander verknüpft ist.

2.2 Die Einflußgrößen der Produktionsplanung

In diesem Abschnitt sollen die Determinanten der Produktionsplanung analysiert werden. Dabei wird bewußt auf eine nach Teilplanungen gegliederte Untersuchung verzichtet. Die Überschneidung der Planungsaufgaben würde wiederholte Betrachtungen bestimmter Zusammenhänge erforderlich machen, ohne zur Verdeutlichung des vorliegenden Problemkreises beitragen zu können. Die Ausführungen würden den Rahmen dieser Arbeit nur unzweckmäßg ausdehnen.

2.2.1 Die betriebspolitisch bedingten Einflußgrößen

Die im vierten und fünften Abschnitt dargestellten Modelle beziehen sich ausschließlich auf die einfache unternehmerische Zielvorstellung der Gewinnmaximierung.[1] Deshalb sollen hier nur die Einflußfaktoren diskutiert werden, die im Zusammenhang mit diesem Entscheidungskriterium auftreten.

---

1) Dabei soll nicht übersehen werden, daß die Gewinnmaximierung nur bedingt den realistischen Verhältnissen entspricht. Vgl. E.HEINEN, a.a.O.; H.JACOB, a.a.O.; H.KOCH, Betriebliche Planung, a.a.O.; neben der Fülle der möglichen Zielsetzungen muß der Gewinnmaximierung dennoch eine erhebliche Bedeutung zugestanden werden. So schreibt E.HEINEN, a.a.O., S.127: "Generell dürfte das Zielsystem 'Gewinnmaximierung unter Nebenbedingungen' der Präferenzstruktur von Eigentümerunternehmern entsprechen." Die Quantifizierbarkeit dieser Zielvorstellung ermöglicht in vielen Situationen einen geeigneten Kompromiß zwischen der mathematischen Formulierung von Planungsaufgaben und der Aussagekraft der Ergebnisse für die Unternehmung.

Der Gewinn läßt sich in einfacher Form als Erlös minus Kosten definieren:[1]

(2.1) $G = E - K$

Diese Gleichung genügt dann der Gewinnmaximierung, wenn die Differenz zwischen Erlös und Kosten zu einem Maximum wird:

(2.2) $G = E - K \longrightarrow \text{Max.}$

Damit ist die unternehmerische Zielsetzung jedoch keineswegs eindeutig festgelegt. Zunächst muß geklärt werden, ob die Geschäftsleitung den Gewinn kurzfristig oder langfristig maximieren will.[2] Kurzfristige Überlegungen mögen den Unternehmer dazu verleiten, eine vorübergehende Nachfragesteigerung durch überhöhte Preise auszunutzen. Langfristig muß er aber damit rechnen, daß dann ein Teil seiner Kundschaft abwandert, sobald der Markt die Möglichkeit dazu bietet. Liegen günstige Absatzprognosen für die Zukunft vor, so mag die Investition sehr kapitalintensiver Anlagen den Gewinn auf lange Sicht maximieren; kurzfristig gesehen, müßte man weniger aufwendigen Fertigungsverfahren den Vorrang geben. Werbemaßnahmen und Forschungsarbeiten sind ein Kriterium für langfristige Gewinnmaximierungen. Da die Unternehmungen im allgemeinen nicht für kurze Zeit gegründet werden, muß die langfristige Zielsetzung im Vordergrund stehen.

Die Länge des Planungszeitraums läßt sich aufgrund der betriebsindividuellen Strukturen jedoch nur allgemein

---

1) H.JACOB, a.a.O., S.67
2) F.X.BEA, Kritische Untersuchungen über den Geltungsbereich des Prinzips der Gewinnmaximierung, Betriebliche Forschungsergebnisse, Bd. 36, Berlin 1968, S.89 ff.; J.BINDLINGMAIER, Zielkonflikte und Zielkompromisse im unternehmerischen Entscheidungsprozeß, Studienreihe, Betrieb und Markt, Bd. XI, Wiesbaden 1968, S.107; H.JACOB, a.a.O., S.18; K.TÖPFER, Regionalpolitik und Standortentscheidung, Bielefeld 1969, S.45

umschreiben. Als zweckmäßig wird die Zeitspanne vom Entscheidungszeitpunkt bis zum "ökonomischen Horizont" angesehen.[1)]

"Der Ausdruck "ökonomischer Horizont" bedeutet dabei jene zeitliche Grenze, bis zu der die Firma die Entwicklung der für sie bedeutsamen Daten, also im besonderen ihre Absatz-, Bezugs- und Konkurrenzverhältnisse mit gerade noch hinreichender Sicherheit überblicken zu können glaubt."[2)]

Mit zunehmender Länge des Planungszeitraums wächst nicht nur der Unsicherheitsgrad, sondern auch die Zahl der zu erfassenden Daten. Die bisher bekannten mathematischen Methoden erlauben nur unter stark vereinfachenden Annahmen die Lösung von langfristigen Planungsaufgaben. Die Modelle im Abschnitt 4.2[3)] zeigen einen Lösungsweg für solche Probleme mit Hilfe der dynamischen Programmierung. Die anderen Beispiele - insbesondere die des Abschnittes 5 - befassen sich mit kurzfristigen Planungen. Ihr Aussagewert ist um so größer, je weniger sich die relevanten Daten im Zeitablauf ändern.[4)]

Eine andere Determinante betriebspolitischer Art ist das Liquiditätsprinzip.[5)] Um den Fortbestand einer Unternehmung zu sichern, muß das Gewinnstreben die Aufrechterhaltung des finanziellen Gleichgewichts gewährleisten.[6)] Die Unternehmung muß in jedem Augenblick über soviel liquide Mittel verfügen, daß sie den

---

1) Vgl. H.JACOB, a.a.O.
2) Ebenda
3) Vgl. S. 53
4) H.JACOB, a.a.O.
5) Vgl. D.HÄRLE, Finanzierungsregeln und ihre Problematik, Wiesbaden 1961, S.61 u. 77 ff.
6) Vgl. J.BINDLINGMAIER, a.a.O.; E.HEINEN, a.a.O., S.118; ders., Einführung in die Betriebswirtschaftslehre, Wiesbaden 1968, S.216 ff.; H.LANGEN, Der Betrieb als Regelkreis, in: Organisation und Rechnungswesen, Festschrift für E.KOSIOL zu seinem 65. Geburtstag, herausgegeben von E.GROCHLA, Berlin 1964, S.85 ff.

fälligen Verpflichtungen nachkommen kann. Das Gewinnmaximierungsprinzip mag bei vorübergehend niedrigen Preisen auf dem Beschaffungssektor einen Großeinkauf von Werkstoffen befürworten. Der Bestand an liquiden Mitteln kann diese Maßnahme jedoch verbieten, da er nicht ausreicht, um die augenblicklichen und künftigen Zahlungen termingerecht zu erfüllen.

Die Absicherung des finanziellen Gleichgewichts muß sowohl kurzfristig als auch langfristig erfolgen. Neben eindeutig feststehenden Größen finden damit auch unsichere Daten Eingang in die Planung. Ihr Unsicherheitsgrad verlangt die zusätzliche Schaffung von Sicherheitsbeständen, wodurch das Ziel der Gewinnmaximierung weiter eingeengt wird.

Obgleich diese Größen leicht quantifiziert werden können, erschwert ihre Fülle eine brauchbare Anwendung mathematischer Verfahren.[1] Die Modelle dieser Arbeit gehen von der Annahme aus, daß die Gewinnmaximierung keine Beschränkung durch das Liquiditätsprinzip erfährt. Der finanzielle Bereich bleibt deshalb unberücksichtigt.[2]

2.2.2 Die absatz- und lagerpolitisch bedingten Einflußgrößen der Produktionsplanung

In diesem Abschnitt sollen die Determinanten des Absatz- und Lagerplans untersucht werden, die Einfluß auf das Produktionsprogramm ausüben können. Insbesondere müssen hier Preise, Mengen, Artikel- bzw. Sortenzahl, Liefertermine und Lagerkapazitäten genannt werden.

---

1) In der Praxis erfolgt im Anschluß an die Produktionsplanung eine Abstimmung mit dem Finanzierungssektor; vgl. K.MELLEROWICZ, a.a.O., S.313

2) Andere Bestimmungsgrößen betriebspolitischer Art werden im Rahmen dieser Arbeit nicht diskutiert. Es sei lediglich auf die Ausführungen von Wöhe verwiesen, der untersucht, ob die Unternehmensleitung bei bestimmten Steuersätzen den Gewinn vor oder nach Abzug der Gewinnsteuern maximieren sollte; vgl. G.WÖHE, Betriebswirtschaftliche Steuerlehre, Bd. II, 2. Halbband, Berlin und Frankfurt 1965, S.145 ff.; vgl. auch J.WEHMEYER, Die steuerliche Planung der Unternehmung, Düsseldorf 1967, S.18

Der Erlös einer Einproduktunternehmung ergibt sich aus dem Produkt von Menge und Preis:

$$(2.3) \qquad E = x \cdot P$$

Für die Mehrproduktunternehmung gilt daher die Erlösbeziehung:

$$(2.4) \qquad E = \sum x_i \cdot P_i$$

Die Höhe der Preise hängt dabei weitgehend von der Marktstruktur, der Stellung des Unternehmens auf dem Markt, sowie den allgemeinen und speziellen Angebots- und Nachfrageverhältnissen ab.[1] Für den Unternehmer können sich zwei wesensverschiedene Situationen ergeben:

1) Der Verkaufspreis ist unabhängig von seiner Angebotsmenge[2]
2) Der Verkaufspreis steht in funktionaler Abhängigkeit zur Angebotsmenge, wobei die Beziehung gilt:

$$(2.5) \qquad P = f(x)$$

Liegt die erste Bedingung vor, so kann die Produktionsplanung in Einproduktbetrieben unter bestimmten Voraussetzungen erheblich vereinfacht werden. Sind die Grenzkosten bis zur Kapazitätsgrenze kleiner oder gleich dem Verkaufspreis, dann führt eine reine Kostenminimierung bereits zum Gewinnmaximum.[3]

---

1) Auf eine detaillierte Darstellung der Verhaltensweisen der Unternehmer kann im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen werden. Mit diesem Problem befassen sich eingehend: E.GUTENBERG, Grundlagen..., Der Absatz, 11.Aufl., Berlin-Heidelberg-New York 1968, S.183 ff.; H.JACOB, a.a.O., S.57 ff.; E.SCHNEIDER, Einführung in die Wirtschaftstheorie, Bd.2, 11.Aufl., Tübingen 1967, S.60 ff.
2) In der Theorie spricht man in diesem Zusammenhang von "Mengenanpasser"; vgl. E.GUTENBERG, a.a.O.,S.220; H.JACOB, a.a.O., S.130 ff. und E.SCHNEIDER, a.a.O., S.61 ff.
3) Diese Annahme liegt den Modellen des Abschnittes 4 zugrunde; vgl. S.46 ff.

Hängt die Höhe der Preise von der Angebotsmenge ab, dann müssen die daraus abgeleiteten (konjekturalen) Preisabsatzfunktionen[1] grundsätzlich bei der Produktionsplanung berücksichtigt werden. In der Theorie geht man davon aus, daß bei steigenden (sinkenden) Preisen die Nachfrage abnimmt (zunimmt).[2] Lassen sich auch entgegengesetzte Entwicklungen in der Praxis nachweisen,[3] so muß dieser Verlauf doch als typisch angesehen werden. Die Problematik liegt in der Erfassung der Zusammenhänge. Je genauer die Erwartungswerte geschätzt werden, desto exakter wird das Planungsergebnis. Dabei können lineare, gekrümmte (konvexe und konkave) oder unstetige Verläufe die tatsächlichen Verhältnisse widerspiegeln.

Die im 4. Abschnitt dargestellten Modelle unterstellen lineare Preisabsatzfunktionen.[4] Die Höhe der Preise ergibt sich aus der Beziehung:

$$(2.6) \qquad P(x) = a - b \cdot x$$

Dehnen wir die Betrachtung auf mehrere Perioden aus, so müssen die obigen Überlegungen in folgender Weise ergänzt werden. Die möglichen Preisabsatzfunktionen können sich in ihrer Gestalt und Lage im Zeitablauf ändern. Dabei kann es sich um Schwankungen oder Verschiebungen handeln.[5] Schwankungen können saisonbedingt sein; Verschiebungen können z.B. durch Veränderung der Bedürfnisstruktur oder Einkommensverhältnisse hervorgerufen werden. Die Produktionsplanung müßte sämtliche Preisabsatzfunktionen erfassen, um den Gesamtgewinn zu maximieren.[6]

---

1) Vgl.E.GUTENBERG, a.a.O., S.12 ff. u.284 ff.; E.SCHNEIDER, a.a.O., S.61 ff.
2) Vgl.E.SCHNEIDER, a.a.O., S.62
3) Vgl.H.JACOB, a.a.O., S.61; E.SCHNEIDER, a.a.O.,S.11
4) Die Lösungsverfahren lassen sich jedoch in gleicher Weise auf beliebig andere Abhängigkeiten anwenden.
5) Vgl.die Ausführungen von M.SEITZ,Probleme der betrieblichen Planung bei im Zeitablauf wechselnden Marktverhältnissen,Schriften zur theoretischen und angewandten Betriebswirtschaftslehre,Bd. 3,Wiesbaden 1968,S.16ff.
6) Ein stark vereinfachtes Beispiel eines einstufigen Einproduktbetriebes wird von M.SEITZ mit Hilfe der dynamischen Programmierung gelöst.Vgl.M.SEITZ,a.a.O.,S.247ff.

In der Praxis - insbesondere bei auftragsorientierten Unternehmen - werden die Verkaufsmengen vielfach bereits im Absatzplan eindeutig festgelegt. Die Produktionsplanung muß dann dafür sorgen, daß die benötigten Mengen zu den geringsten variablen Kosten[1] hergestellt werden. Übersteigt die Verkaufsmenge in einzelnen Perioden die vorhandene Produktionskapazität, so muß in den vorhergehenden Zeiträumen auf Lager produziert werden.[2] Gegebenenfalls müssen Produktions- und Lagerkapazitäten als Nebenbedingungen in einen Lösungsansatz aufgenommen werden.[3]

Sind die Liefertermine durch den Absatzplan bereits festgelegt worden, dann muß die Produktionsplanung so fein gegliedert werden, daß sie die Fertigstellung der benötigten Mengen zum Lieferzeitpunkt gewährleistet. Eine Abstimmung wird durch Umrechnung der Mengeneinheiten in Produktionszeiten ermöglicht. Unter Berücksichtigung von Zwischen- und Endlagerungen muß der Produktionsablauf ermittelt werden, der die geringsten variablen Kosten verursacht.

---

1) Die Gesamtkosten (K) werden in der Kostentheorie als Summe der (beschäftigungs-) fixen Kosten (K_f) und (beschäftigungs-) variablen Kosten (Kv) verstanden. Von SCHMALENBACH ausgehend, ist in der Literatur wiederholt verdeutlicht worden, daß nur die variablen Kosten das Produktionsplanungsergebnis beeinflussen. Die beschäftigungsfixen Kosten bleiben deshalb unberücksichtigt. Vgl. H.G.PLAUT, Wo steht die Plankostenrechnung in der Praxis?, ZfhF 1952, S.401; ders., Die Grenzplankostenrechnung, ZfB 1955, S.27; K.RUMMEL, Einheitliche Kostenrechnung auf der Grundlage einer vorausgesetzten Proportionalität der Kosten zu betrieblichen Größen, 3. durchgesehene und erweiterte Aufl., Düsseldorf 1949, S.209 ff., E.SCHMALENBACH, Kostenrechnung und Preispolitik, 7. erw. und verb. Aufl., Köln und Opladen 1956, S.40 ff.

2) Auf andere Verhaltensweisen bei schwankendem Absatz kann im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen werden. Vgl. die Ausführungen von K.MELLEROWICZ, Die Beziehungen zwischen Produktions- und Vertriebspolitik, in: Sozialökonomie in politischer Verantwortung, Festschrift für J.TIBERTIUS, herausgegeben von O.TRIEBENSTEIN, Berlin 1964, S.310

3) Die im Abschnitt 4.2 aufgeführten Modelle entsprechen dieser Problemstellung.

Eine andere Determinante absatzpolitischer Art ist die Programmweite. Der Absatzplan kann bereits vorschreiben, welche Produkte und welche Mengen hergestellt werden müssen. Die schwierigste Aufgabe der Produktionsplanung besteht dann vornehmlich darin, die Reihenfolge zu ermitteln, welche (gegebenenfalls unter Einhaltung der Liefertermine) die geringsten variablen Kosten verursacht.[1)]

Werden die Artikel und Mengen nicht fest vorgegeben, dann muß die Produktionsplanung unter Realisierung der Zielvorstellung eine Auswahl der Produkte treffen und die Produktionsmengen bestimmen.[2)] Ein Vergleich läßt sich bei unterschiedlichen Preisen bzw. Preisabsatzfunktionen nur mit Hilfe der Deckungsbeiträge[3)] durchführen.

Als Deckungsbeitrag wird die Differenz von Erlös und variablen Kosten bezeichnet. Für das Produkt i und die Menge j bestimmt sich diese Größe nach folgender Relation:

$$(2.7) \qquad DB_{ij} = E_{ij} - Kv_{ij}$$

Unter Verwendung von Gleichung (2.5) und (2.6) ergibt sich

$$(2.8) \qquad DB_{ij} = x_{ij} \cdot P_{ij} - Kv_{ij}$$

bzw.:

$$(2.9) \qquad DB_{ij} = x_{ij} \cdot (a_i - b_i \cdot x_{ij}) - Kv_{ij}$$

---

1) Mit dieser Fragestellung befassen sich die Modelle von KÜNZI und SASIENI, YASPAN und FRIEDMAN; vgl. S. 104 ff.

2) Die Modelle 3 und 4 im Abschnitt 5 ermöglichen eine zielgerechte Entscheidung unter diesen Voraussetzungen; vgl. S.151ff.

3) Zum Begriff "Deckungsbeitrag" vgl. P.RIEBEL, Das Rechnen mit Einzelkosten und Deckungsbeiträgen als Grundlage unternehmerischer Entscheidungen im Fertigungsbereich, in: Neue Betriebswirtschaft, 1961, S.145 ff.; H.SCHAFFNER, Die Deckungsbeitragsrechnung, in: Die Unternehmung, 1962, S.185 ff.

Wird die verfügbare Produktionszeit zum Engpaß, dann müssen die Deckungsbeiträge der einzelnen Artikel je Zeiteinheit ermittelt werden. Dadurch lassen sich die Erfolgsbeiträge der Alternativen in jedem Zeitintervall vergleichen. Die Produktionszeit muß so aufgeteilt werden, daß in jedem Zeitabschnitt der größtmögliche Deckungsbeitrag realisiert wird.[1)]

2.2.3 Die produktionspolitisch bedingten Einflußgrößen der Produktionsplanung

Die Determinanten produktionspolitischer Art ergeben sich durch die Beschaffenheit, Menge und Kombination der Produktionsfaktoren sowie aus den möglichen Produktionsverfahren. In der vorliegenden Untersuchung wird ein konstanter Betriebsmittelbestand unterstellt. Engpässe, die durch die Verwendung von Werkstoffen und Arbeitskräften hervorgerufen werden, bleiben unberücksichtigt.

Der gegebene Betriebsmittelbestand determiniert die möglichen Produktionsverfahren. Diese können sich aus einem oder mehreren Arbeitsgängen zusammensetzen. Jeder Arbeitsgang gilt als eine Stufe des Produktionsprozesses. In diesem Sinne wird im folgenden von einstufiger und mehrstufiger Produktion gesprochen. Der einzelne Arbeitsgang wird durch eine Faktorkombination realisiert, die als kleinste produktive Einheit des betrieblichen Leistungsvollzuges - kurz "Produktiveinheit"[2)] - verstanden werden kann. Das Produktionsergebnis hängt dabei von den eingesetzten Faktoren und ihrem Mengenverhältnis ab. Multipliziert man die Faktormengen mit ihren Preisen, so ergeben sich die Kosten. Es gilt die Beziehung:

$$(2.10) \qquad K = \sum r_i \cdot q_i$$

Läßt sich eine bestimmte Ausbringungsmenge mit verschiedenen Faktorkombinationen herstellen, dann muß - entsprechend der Zielvorstellung - die Alternative mit den geringsten Kosten ausgewählt werden.

---

1) Vgl. die Modelle 3 und 4 im Abschnitt 5
2) Vgl. L.PACK, Die Elastizität der Kosten, Wiesbaden 1966, S.65

In der Theorie werden zwei wesensverschiedene funktionale Zusammenhänge unterstellt: die Produktionsfunktion vom Typ A (ertragsgesetzlicher Verlauf) und die Produktionsfunktion vom Typ B (linearer Verlauf).[1] Die zugehörigen Kostenfunktionen haben dementsprechend einen s-förmigen bzw. linearen Kurvenlauf.

Solche Abhängigkeiten lassen sich in der Praxis - auch mit Hilfe der von Gutenberg entwickelten Verbrauchsfunktionen[2] - nur bedingt erfassen. Im Rahmen dieser Arbeit kann lediglich angedeutet werden, daß die empirische Kostenermittlung durch eine Vielzahl von Unsicherheitsfaktoren belastet wird. Die vorliegenden Planungsbeispiele gehen von der Annahme aus, daß die Kosten eindeutig vorgegeben werden können. Da die empirischen Untersuchungen den linearen Kostenverlauf als typisch für die industrielle Produktion anerkennen,[3] wird dieser Beziehung in den Beispielen des fünften Abschnittes besonders Beachtung geschenkt.[4]

Die obigen Ausführungen haben gezeigt, daß eine zielgerechte Planung nur mit Hilfe des Kostengerüstes möglich ist. Deshalb sollen im folgenden die produktionspolitisch bedingten Faktoren untersucht werden, die Einfluß auf die Kosten ausüben. Bilden sie ein Datum für die Planung, dann könnte man von "Kosteneinflußgröße" sprechen. Treten sie dagegen als Aktionsparameter auf, dann würden sie durch den Begriff "Kostenbeeinflussungsgröße" besser charakterisiert.[5]

---

1) Vgl. E.GUTENBERG, a.a.O., S.290 ff.
2) Vgl. E.GUTENBERG, a.a.O., S.315 ff.; W.KILGER, Produktions- und Kostentheorie, Wiesbaden 1958, S.53 ff.
3) Vgl. E.GUTENBERG, a.a.O., S.382
4) Die Modelle könnten jedoch in gleicher Weise mit anderen denkbaren Kostenentwicklungen durchgerechnet werden.
5) Vgl. L.PACK, a.a.O., S.18

Da die Faktoren je nach Planungssituation sowohl konstant als auch variabel sein können, sollen sie im weiteren Verlauf der Arbeit einheitlich als Kosteneinflußgrößen bezeichnet werden.

Grundlage der folgenden Untersuchung ist das von Pack entwickelte System der Kosteneinflußgrößen.[1] Gemäß der Beziehung (2.10) werden die Kosten durch Faktorpreise und -mengen bestimmt. Da die Faktorpreise in den Planungsmodellen konstant gehalten werden,[2] erübrigt sich in dieser Arbeit eine detaillierte Erfassung der Bestimmungsgrößen.

Für die Faktormengen lassen sich folgende Determinanten ermitteln:[3]

1) die Faktorqualitäten
2) der Leistungszeitraum
3) die Zahl der eingesetzten Produktiveinheiten
4) die Leistungsmenge
5) die Leistungsintensität
6) die Leistungszeit
7) die Arbeitsgangfolge

1) Die Faktorqualität hängt von dem Eignungsgrad der Faktoren für die gestellte Aufgabe ab. In diesem Sinne spricht Gutenberg von der technisch-organisatorischen Beschaffenheit der Produktionsbedingungen.[4] In der vorliegenden Untersuchung werden die Faktorqualitäten konstant gehalten. Besondere Beachtung

---

1) Vgl. L.PACK, a.a.O., S.63 ff.; die Konzeption von Gutenberg scheint für diese Untersuchung wenig geeignet, da sie zu sehr auf statische Betrachtung abstellt; vgl. E.GUTENBERG, a.a.O., S.332 ff.
2) Die einzige Ausnahme bildet das Entgelt für die Arbeitskräfte. Im ersten und zweiten Modell des Abschnittes 5 werden unterschiedliche Löhne für normale Arbeitszeit und Überstunden angesetzt. Vgl. S. 113
3) Vgl. L.PACK, a.a.O., S.70
4) Vgl. E.GUTENBERG, a.a.O., S.332

wird dabei dem Auftreten von Ausschuß geschenkt. Strenggenommen müßten auch mögliche Maschinendefekte berücksichtigt werden.[1] Im Rahmen dieser Arbeit werden jedoch technisch bedingte Störungen ausgeschlossen.

2) Der Leistungszeitraum kann mit dem Planungszeitraum gleichgesetzt werden. Wie bereits im Abschnitt 2.2.1 gezeigt wurde, führt eine langfristige Betrachtung zu anderen Ergebnissen als kurzfristige Überlegungen. Die Modelle von Elsner[2] und Seitz[3] verdeutlichen, daß die Produktionsmenge einer Planungsperiode auch von künftigen Perioden beeinflußt werden kann. Die gewinnmaximale Menge eines Zeitabschnittes braucht keineswegs zur langfristigen Gewinnmaximierung zu führen.

3) Können verschiedene Produktiveinheiten wahlweise eingesetzt werden, so muß der Planende entscheiden, welches Verfahren angewendet werden soll. Entsprechend der Gewinnmaximierung ist die Faktorkombination auszuwählen, die bei gleicher Leistung die geringsten Kosten verursacht. Erfordert die Beschäftigungslage den Einsatz mehrerer Produktiveinheiten, dann müssen die Anlagen mit den geringsten variablen Kosten zuerst eingesetzt werden. In der Literatur[4] spricht man in diesem Zusammenhang von quantitativer Anpassung. Die intervallfixen Kosten bleiben in dieser Untersuchung unberücksichtigt, da ein konstanter Betriebsmittelbestand unterstellt wird.

---

1) Vgl. K.OPFERMANN, a.a.O., S.62 ff.
2) Vgl. S. 89
3) Vgl. M.SEITZ, a.a.O., S.252
4) Vgl. E.GUTENBERG, a.a.O., S.367; dieser Sachverhalt wird von GUTENBERG als "Fall B" der quantitativen Anpassung bezeichnet; vgl. W.KILGER, a.a.O., S.95 ff.

4) Die Planungsentscheidungen hängen wesentlich davon ab, ob die Leistungsmenge als Datum oder als Variable vorgegeben wird. Legt der Absatzplan die Menge bereits eindeutig fest, dann besteht das Ziel der Produktionsplanung darin, das kostengünstigste Verfahren zu ermitteln. Bei variabler Produktionsmenge richtet sich das Entscheidungskriterium danach, ob ein Produkt oder mehrere auf denselben Anlagen hergestellt werden. Die Einprodukt-Fertigung realisiert dann das Gewinnmaximum, wenn die Kosten (Grenzkosten) und der Preis (Grenzerlös) der letzten Produkteinheit gleich groß sind.[1] Allgemein gilt die Beziehung:

(2.11) $E' = K'$

Reichen die vorhandenen Produktiveinheiten nicht aus, um diese Menge zu produzieren, dann wird die günstigste Situation erreicht, wenn die Kapazität voll ausgenutzt ist.

Bei mehreren Produkten läßt sich eine zielgerechte Entscheidung nur mit Hilfe der Deckungsbeiträge verwirklichen. Werden für die einzelnen Artikel unterschiedliche Produktionszeiten benötigt, dann kann nur ein Vergleich der Deckungsbeiträge je Zeiteinheit zum angestrebten Ziel führen. Wie bereits dargelegt wurde,[3] muß in jedem Zeitabschnitt die Alternative ausgewählt werden, die den jeweils größten Deckungsbeitrag ermöglicht.

5) Die Leistungsintensität einer Produktiveinheit gibt an, wieviel Mengeneinheiten pro Zeiteinheit hergestellt werden.[4] Durch unterschiedliche Inan-

---

1) Dieser Bedingung liegt die Annahme zugrunde, daß die Grenzkosten für jede Einheit einer geringeren Menge kleiner oder gleich dem entsprechenden Grenzerlös sind.
2) Vgl. E.GUTENBERG, Grundlagen..., Absatz, a.a.O., S.200
3) Vgl. S.18
4) Vgl. L.PACK, a.a.O., S.66

spruchnahme der Faktoren läßt sich diese Intensität bei verschiedenen Anlagen variieren. Dadurch erhält die Unternehmung eine weitere Möglichkeit, sich an veränderte Beschäftigungslagen anzupassen (intensitätsmäßige Anpassung[1]).

Die Steigerung der Ausbringungsmenge je Zeiteinheit kann zu einer Erhöhung der Kosten führen. Dies wird immer dann der Fall sein, wenn die Produktiveinheiten übermäßig beansprucht werden. Starker Verschleiß, überhöhter Verbrauch an Schmiermitteln und Energien können einen progressiven Anstieg der Kosten bewirken. - Diese Kostenentwicklung wird in den ersten beiden Modellen des Abschnittes 5 unterstellt.[2]

6) Eine andere Kostendeterminante ist die Leistungszeit. In verschiedenen Produktionszweigen kann die Nutzungszeit der Produktiveinheiten variiert werden. Entsprechend der Beschäftigungslage besteht dann die Möglichkeit, sich zeitlich anzupassen.[3] Die Unternehmung kann z.B. Kurzarbeiten, Überstunden oder mehrere Arbeitsschichten einführen.[4] Der lineare Kostenverlauf erfährt eine Änderung, wenn Überstunden oder Nachtschichten eingelegt werden. Diese Wirkung wird durch die tariflich festgesetzten Überstunden- oder Nachtzuschläge hervorgerufen. - Die ersten beiden Modelle des Abschnittes 5 berücksichtigen eine Erhöhung der Kosten bei einer Überschreitung der normalen Arbeitszeit.[5]

---

1) Vgl. E.GUTENBERG, Grundlagen..., Die Produktion, a.a.O., S.349
2) Vgl. S.113ff.
3) Vgl. E.GUTENBERG, Grundlagen..., Die Produktion, a.a.O., S.359; W.KILGER, a.a.O., S.94
4) Die Einführung einer weiteren Schicht erfordert neben der zeitlichen Anpassung eine quantitative Anpassung, da zusätzlich Arbeitskräfte für den Produktionsprozeß bereitgestellt werden müssen.
5) Vgl. S.113ff.

7) Lassen sich verschiedene Arbeitsgänge auf einer Produktiveinheit verrichten, dann muß die Produktionsplanung darüber entscheiden, welche Arbeitsgangarten, wann, wie lange und wie oft in einer Planungsperiode durchgeführt werden sollen. Die Umstellung von einer Arbeitsgangart auf eine andere erfordert in der Praxis vielfach Lohn-, Material- und/oder Werkzeugkosten, die im folgenden unter dem Begriff Rüstkosten zusammengefaßt werden. Diese Kosten fallen unabhängig von der jeweiligen Ausbringungsmenge an. In der Literatur werden sie als losfix oder losunabhängig bezeichnet.[1] Ihre Höhe kann jedoch durch die Reihenfolge der Arbeitsgänge beeinflußt werden.

Unter dem Gesichtspunkt der Kostenminimierung fordern die Rüstkosten eine möglichst große Ausbringungsmenge, um den Anteil der einzelnen Produkteinheit an den losfixen Kosten zu minimieren. Bereits in der klassischen Losgrößenformel[2] wird deutlich, daß die dadurch hervorgerufenen Lagerkosten dieser Tendenz entgegentreten. Außerdem führt eine isolierte Betrachtung der Losgröße eines Produktes grundsätzlich nicht zur besten Realisierung der Zielvorstellung.[3] Eine exakte Planung muß sämtliche Lose simultan bestimmen. Die Produktionsendtermine müssen mit den Absatzterminen so abgestimmt werden, daß die anfallenden Rüst-, Lager- und Produktionskosten minimiert werden bzw. die erzielten Deckungsbeiträge maximiert werden.

Für eine uneingeschränkte Problemstellung dieser Art liegt bisher noch kein mathematisches Lösungsverfahren vor. Unter bestimmten Voraussetzungen läßt sich die dynamische Programmierung auf solche Planungsprobleme anwenden.[4]

---

1) Vgl. D.ADAM, a.a.O., S.53; E.GUTENBERG, Grundlagen..., Die Produktion, a.a.O., S.203
2) Vgl. E.GUTENBERG, Grundlagen..., Die Produktion, a.a.O., S.204; vgl. auch D.ADAM, a.a.O., S.52, der eine umfassende Aufstellung der Literatur zum Losgrößenproblem gibt.
3) Vgl. D.ADAM, a.a.O., S.55
4) Vgl. die Modelle 3 und 4 im Abschnitt 5, S. 151 ff.

Besteht der Produktionsprozeß aus mehreren Stufen, so kann die Planungsarbeit - insbesondere bei Mehrproduktbetrieben - erheblich erschwert werden. Entsprechend den praktischen Gegebenheiten kann die Reihenfolge der Stufen variierbar oder fest vorgegeben sein. Neben den oben genannten Daten müssen die Kosten und Kapazitäten für Zwischenlagerungen sowie Produktions- und Stillstandzeiten der einzelnen Aggregate bei der Planung berücksichtigt werden. Einerseits strebt die Ablaufplanung eine Minimierung der Durchlaufzeiten an, andererseits fordert sie eine optimale Betriebsauslastung.[1)]

Nur unter der Voraussetzung, daß die Minimierung der gesamten Durchlaufzeit die kostengünstigste Situation realisiert, eignen sich die Modelle von Sasieni, Yaspan und Friedman bzw. Künzi für eine zielgerechte Entscheidung.[2)]

Mit diesen Ausführungen sind die wichtigsten Bestimmungsgrößen der Produktionsplanung charakterisiert. Im folgenden Abschnitt sollen die Voraussetzungen analysiert werden, die zur Anwendung der dynamischen Programmierung erforderlich sind.

---

1) Vgl. D.ADAM, a.a.O., S.132; T.ELLINGER, a.a.O., S.109; E.GUTENBERG, Grundlagen..., Die Produktion, a.a.O., S.214
2) Vgl. S. 104 ff.

3 Die Elemente der dynamischen Programmierung

3.1 Das Optimalitätsprinzip von Richard Bellman

Die dynamische Programmierung ist eine mathematische Methode, die Anfang der 50er Jahre von Richard Bellman entwickelt wurde.[1] Er schlug die Bezeichnung "dynamic programming" vor, weil mit diesem Verfahren zunächst nur im Zeitablauf auftretende Prozesse optimiert wurden.[2] Spätere Untersuchungen[3] haben jedoch gezeigt, daß diese Formulierung keine umfassende Charakterisierung darstellt.[4] Deshalb werden in der Literatur auch Bezeichnungen wie "recursive optimization"[5] oder "sequentielle Programmierung"[6] vorgeschlagen. Obgleich die Begriffe das Wesen der von Bellman entwickelten Methode stärker verdeutlichen, haben sie sich bisher in der englisch- und deutschsprachigen Literatur nicht durchsetzen können. Aus Gründen der Eindeutigkeit wird deshalb in dieser Arbeit die Bezeichnung dynamische Programmierung beibehalten.

---

1) R.BELLMAN, a.a.O.; vgl. G.HADLEY, Nichtlineare und dynamische Programmierung, Würzburg-Wien 1969, S.422
2) G.HADLEY, a.a.O., S.422; H.WEDEKIND, Das dynamische Programmieren als eine Methode zur Auswertung von Verkaufsstatistiken in der Konsumgüterindustrie, ZfB 1966, S.22
3) Vgl. M.J.BECKMANN, Dynamic Programming of Economic Decisions, Berlin-Heidelberg-New York 1968; R.HOWARD, Dynamische Programmierung und Markov-Prozesse, Zürich 1965; L.PACK, a.a.O., S.281 ff.; J.S.WENTZEL, Elemente der dynamischen Programmierung, München-Wien 1966
4) Dieser Sachverhalt wird auch durch die Modelle im Abschnitt 5 verdeutlicht.
5) G.L.NEMHAUSER, Introduction to Dynamic Programming, New York-London-Sydney 1966, S.8
6) H.REINERMANN, Die optimale Gestaltung der täglichen Arbeitszeit im Industriebetrieb, Wiesbaden 1968, S.111

Das Wesen der dynamischen Programmierung ist ein mehrstufiger Entscheidungsprozeß (multistage decision process).[1] Jedes Planungsproblem muß zunächst in einzelne Stufen aufgespalten werden. Dann erfolgt eine schrittweise Optimierung, wobei in jedem Schritt eine weitere Stufe in die Betrachtung einbezogen wird. Die so ermittelten Optima werden im folgenden als relative Optima bezeichnet, da sie nur für die jeweils betrachteten Stufen optimal sind.

Entscheidend ist, daß die Optimierung in jedem Schritt unter Berücksichtigung der im vorhergehenden Schritt ermittelten relativen Optima erfolgt. Dieser Prozeß muß solange fortgesetzt werden, bis alle Stufen des Planungsproblems optimiert sind. Bellman faßt diese Vorgehensweise in dem von ihm genannten Optimalitätsprinzip zusammen: "An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision."[2]

Charakteristisch für die dynamische Programmierung ist die Entwicklung eines Systems von Rekursionsbeziehungen, das eine Gesamtoptimierung ermöglicht.

3.2 Die Voraussetzungen der dynamischen Programmierung

Im Gegensatz zu anderen mathematischen Methoden hat die dynamische Programmierung den Vorzug, daß sie als Lösungsverfahren nur an relativ wenig Voraussetzungen gebunden ist. So ist ihre Anwendungsmöglichkeit keineswegs auf stetige funktionale Beziehungen beschränkt, wie etwa bei der Differenzierungsmethode.

---

1) R.BELLMAN, Determination of Optimal Trajectories Via Dynamic Programming, in: Optimization Techniques, Edited by G.LEITMANN, New York-London 1962, S.282

2) R.BELLMAN, Dynamic Programming, 4.Aufl. Princeton, New Jersey 1965, S.83

Die wesentlichen Voraussetzungen für die dynamische Programmierung lassen sich aus dem oben genannten Optimalitätsprinzip ableiten.[1] Zunächst muß das Planungsproblem in einzelne Stufen aufgespalten werden. Viele Entscheidungsmodelle bieten diese Vorgehensweise geradezu an. Je nach Problemstellung kann z.B. in der Produktionsplanung eine zeitliche, räumliche oder prozeßbedingte Trennung vorgenommen werden. Bei anders gearteten Strukturen müssen solche Stufen gebildet werden, daß eine schrittweise Optimierung zur besten Gesamtlösung führt.[2]

Im allgemeinen lassen sich die Planungsaufgaben in eine endliche Zahl von Stufen aufspalten. In der betrieblichen Planung treten jedoch auch verschiedene Probleme mit unendlicher Planungsdauer auf. Hier bieten sich zwei Lösungswege mit Hilfe der dynamischen Programmierung an.[3]

Die erste Möglichkeit besteht in einer Diskontierung der erwarteten zukünftigen Kosten oder Gewinne bzw. Deckungsbeiträge. Dieser Vorgehensweise liegt folgende Überlegung zugrunde. Je weiter die erwarteten Kosten oder Gewinne vom Planungszeitpunkt entfernt sind, desto geringer wird ihr Einfluß durch die Diskontierung auf die Planungsentscheidung. Entstehen in den einzelnen Perioden (Stufen) etwa gleich hohe Kosten, dann wird die Summe der diskontierten Kosten konvergieren, wenn der Diskontierungsfaktor kleiner

---

1) Vgl. R.BELLMAN, a.a.O., S.81 ff.; K.ELSNER, Mehrstufige Produktionstheorie und dynamisches Programmieren, Meisenheim 1964, S.77 ff.; H.REINERMANN, a.a.O., S.109; A.VAZSONYI, Die Planungsrechnung in Wirtschaft und Industrie, Wien und München 1962, S.232

2) In den Modellen des Abschnittes 5 beziehen sich die Stufen z.B. auf die Zahl der Produktiveinheiten bzw. die Zahl der herzustellenden Produkte, vgl. S. 113

3) Vgl. G.HADLEY, a.a.O., S.544; R.HOWARD, a.a.O.,S.57; M.SASIENI, A.YASPAN, L.FRIEDMANN, Methoden und Probleme der Unternehmensforschung, Würzburg 1967, S.286 ff.

als eins ist. Daraus läßt sich eine allgemeine Zielbedingung ableiten: nur die Politik ist optimal, die die Summe aller diskontierten Kosten (Gewinne bzw. Deckungsbeiträge) minimiert (maximiert).[1]

Der zweite Lösungsweg kann eingeschlagen werden, wenn das Planungsproblem aus einem vollständig ergodischen Markov-Prozeß besteht.[2] Charakteristisch für den Markov-Prozeß ist, daß ein System in jeder Stufe bestimmte Zustände annehmen kann, wobei für den Übergang von einem Zustand der vorhergehenden Stufe zu einem Zustand der nachfolgenden Stufe bestimmte Übergangswahrscheinlichkeiten existieren. Die gesamte Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System von einem Anfangszustand k nach i - 1 Übergängen in einen Zustand j der Stufe i übergeht, wird als Zustandswahrscheinlichkeit bezeichnet. Ist diese Wahrscheinlichkeit für den Zustand j unabhängig von dem Anfangszustand, dann liegt ein vollständig ergodischer Markov-Prozeß vor.

Ein solches System kann mit dem von Howard entwickelten Algorithmus gelöst werden.[3] Man muß jedoch beachten, daß sich die Übergangswahrscheinlichkeiten von Stufe zu Stufe nicht ändern dürfen und daß die Kosten- bzw. Gewinnstruktur konstant bleiben muß. Damit werden Bedingungen gesetzt, die keineswegs typisch für die langfristige Produktionsplanung sind. Deshalb soll im Rahmen dieser Arbeit nicht näher auf das von Howard beschriebene Verfahren eingegangen werden.

Bei der Stufenbildung kommt es nicht darauf an, daß alle Stufen den gleichen Umfang besitzen, wesentlich ist nur, daß auf jeder Stufe eine Entscheidungsfreiheit besteht. Diese zweite Voraussetzung kann in

---

1) Vgl. auch das Modell des Abschnittes 4.2.4
2) R.HOWARD, a.a.O., S.7
3) R.HOWARD, a.a.O., S.57 ff.; H.P.KÜNZI, O.MÜLLER, E.NIEVERGELT, Einführungskurs in die dynamische Programmierung, Berlin-Heidelberg-New York 1968, S.85 ff.

folgender Weise verdeutlicht werden. Jede Stufe muß durch mehrere mögliche Zustände charakterisiert sein. Es muß also eine Größe vorliegen, die verschiedene Ausprägungen annehmen kann. Sie soll im folgenden als Zustandsvariable bezeichnet werden. Dadurch kann das System von der vorhergehenden Stufe in einen beliebigen Zustand der nachfolgenden Stufe überführt werden.

In der Literatur ist vielfach behauptet worden, daß nur eine Zustandsvariable in jeder Stufe auftreten darf.[1] Verschiedene Untersuchungen haben jedoch gezeigt, daß bestimmte Systeme mit weniger als vier Zustandsvariablen noch ohne übermäßigen Rechenaufwand gelöst werden können.[2]

Die Entscheidungsfreiheit setzt voraus, daß die optimale Gesamtlösung in jeder Stufe durch einen Zustand bzw. mehrere alternative Zustände der jeweiligen Variablen charakterisiert werden kann. Ist ein bestimmter Zustand erreicht, so werden dadurch alle übrigen Ausprägungen derselben Variablen ausgeschlossen.

Eine schrittweise Optimierung kann nur zur besten Gesamtlösung führen, wenn das System eine dritte Voraussetzung erfüllt: jede künftige Handlung darf keinen Einfluß auf vergangene Entwicklungen ausüben. Die in einer Stufe ermittelten relativen Optima müssen also unabhängig von späteren Entscheidungen sein. Aus dieser Bedingung ergibt sich für den Planenden, daß eine einmal eingeschlagene Lösungsrichtung eingehalten werden muß. Diese Richtung wird durch den Ausgangspunkt der Optimierung festgelegt.

---

1) Vgl. CH.R.CARR und CH.W.HOWE, Quantitative Decision Procedures in Management and Economics, Deterministic Theory and Applications, New York-San Francisco-Toronto-London 1964, S.323; L.G.NEMHAUSER, a.a.O., S.6; H.REINERMANN, a.a.O.,S.103

2) Vgl. G.HADLEY, a.a.O., S.507 u. 510 ff.; R.W.SHEPHARD, Dynamic Programming, Produktionsplanung zum Zweck der Minimierung der Produktions- und Lagerhaltungskosten, in: Ablauf- und Planungsforschung, 1964, S.1 ff.

Im allgemeinen kann die schrittweise Optimierung sowohl mit der ersten als auch mit der letzten Stufe des Planungsproblems beginnen.[1] Deshalb unterscheiden wir vorwärts- und rückwärtsschreitende Optimierungen. Beide Wege können zu unterschiedlichem Rechenaufwand führen. Dies wird z.B. in dem von Shephard beschriebenen Modell deutlich.[2] Durch die rückwärtsschreitende Optimierung gelingt es, verschiedene theoretisch mögliche Zustände für nachfolgende Entscheidungen als ineffizient auszuschließen. Bei jeder Planungsaufgabe sollte deshalb zunächst untersucht werden, welche Optimierungsrichtung vorteilhafter ist.

Als vierte Voraussetzung muß ein Optimierungsverfahren vorliegen, mit dem die relativen Optima auf jeder Stufe ermittelt werden können. Für die unterschiedlichen Strukturen der einzelnen Planungsaufgaben läßt sich keine allgemeingültige Regel aufstellen. Deshalb muß für jedes einzelne Problem zunächst die Rechenmethode ermittelt werden, die eine zielgerechte Optimierung ermöglicht. Dabei kann es sich um beliebige mathematische Operationen handeln, wie z.B. Differenzierungsverfahren, lineare, konvexe und quadratische Programmierungsverfahren oder reine Wertevergleiche. Eignen sich mehrere Verfahren zur Optimierung, so muß aus wirtschaftlichen Gründen die Methode ausgewählt werden, die den geringsten Rechenaufwand verursacht.

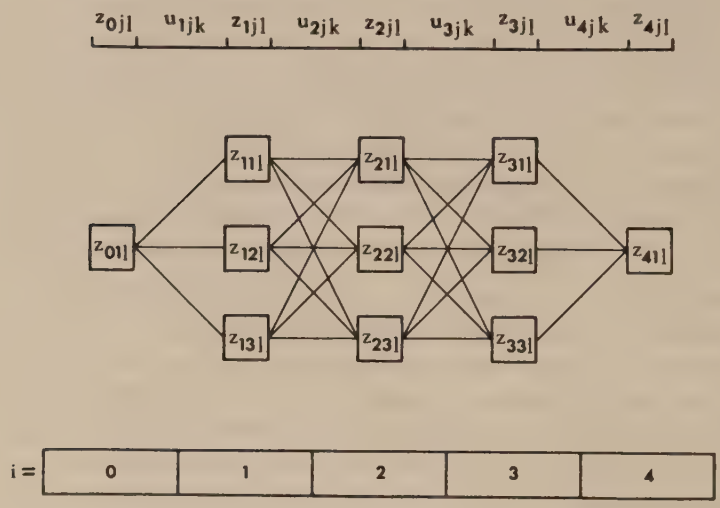
3.3 Allgemeine Formulierung des Lösungsweges

In diesem Abschnitt soll der Lösungsweg anhand eines Netzwerkes verdeutlicht werden. Das System in Abbildung 1 wird durch Knotenpunkte und Wege charakterisiert. Entsprechend der unteren Zeile wird der gesamte Ablauf zunächst in einzelne Stufen (i) aufgespalten.

---

1) Eine Ausnahme stellt z.B. das von KÜNZI entwickelte Modell für die Produktions- und Lagerhaltung dar. Vgl. S. 96
2) Vgl. S. 61

Abbildung 1: Schematische Darstellung eines mehrstufigen Entscheidungsproblems mit Hilfe eines Netzwerkes.



i = Stufen des Systems
k = Knotenpunkt der vorhergehenden Stufe
j = Knotenpunkt der nachfolgenden Stufe
u = Übergang
z = Zustand

Dadurch treten z.B. in den Stufen eins bis drei je drei Knotenpunkte auf. Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß die hier vorliegende Symmetrie keineswegs Voraussetzung für die Anwendung der dynamischen Programmierung ist.

Die einzelnen Wege beschreiben den Übergang (u) - die Transformation - von einem Knotenpunkt der betrachteten Stufe zu einem bestimmten Knotenpunkt

einer vorhergehenden bzw. nachfolgenden Stufe. Durch u_{ijk} wird der Übergang vom Knotenpunkt k der Stufe i - 1 zum Knotenpunkt j der Stufe i determiniert. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß die Richtung der Transformation gleichgültig ist, so daß u_{ijk} auch den Übergang vom Knotenpunkt j der Stufe i zum Knotenpunkt k der Stufe i - 1 angibt. Soll das System von einem Ausgangspunkt in einen bestimmten Knotenpunkt überführt werden, dann wächst die Zahl der möglichen Übergänge mit der Anzahl der zu durchlaufenden Stufen sehr rasch an. So ergeben sich z.B. für das in Abbildung 1 dargestellte Netzwerk - unter Beibehaltung der eingeschlagenen Richtung - 27 alternative Wege zwischen dem Knotenpunkt der Stufe null und dem der Stufe vier.

Die verschiedenen Wege vom Ausgangspunkt bis zum betrachteten Knotenpunkt können zu unterschiedlichen Ergebnissen führen, die wir als Zustände (z) bezeichnen wollen. Jeder Knotenpunkt kann dann als der Ort definiert werden, der eine bestimmte Zahl (l) von Zuständen umfaßt.

Zu beachten ist, daß bei einem fest vorgegebenen Ausgangspunkt die Größe l von Stufe zu Stufe variiert. Wird das System z.B. vom Knotenpunkt der Stufe null in den Knotenpunkt der Stufe vier überführt, so nimmt l für den letzten Knotenpunkt den Wert 27 an.

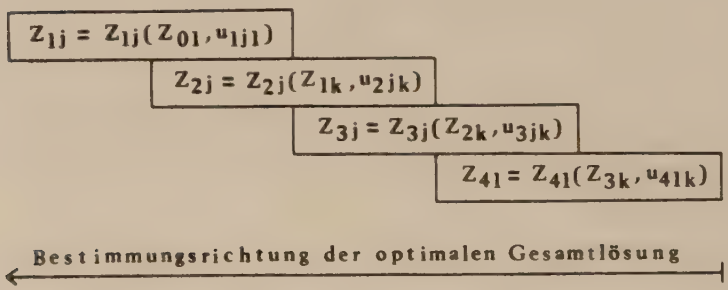
Eine optimale Lösung ohne dynamische Programmierung könnte dadurch erreicht werden, daß das Netzwerk 27-mal über die verschiedenen Wege durchlaufen wird, um anschließend die beste Alternative durch einen Vergleich zu ermitteln.

Die dynamische Programmierung führt jedoch mit bedeutend geringerem Rechenaufwand zum gleichen Ergebnis. Das Optimalitätsprinzip verlangt, daß für jeden Knotenpunkt nur der relativ optimale Zustand bestimmt wird. Für den Knotenpunkt j der Stufe i sei dieser durch Z_{ij} definiert. Wie bereits ausgeführt wurde,

erfolgt diese Optimierung schrittweise unter Verwendung der im vorhergehenden Schritt ermittelten relativen Optima. Die Entscheidungsschritte richten sich danach, ob das Netzwerk vorwärts- oder rückwärtsschreitend durchlaufen wird.

Bei der vorwärtsschreitenden Optimierung bestimmen sich die Z_{ij} durch die $Z_{i-1,k}$ und die Übergänge u_{ijk}. Für das obige Netzwerk ergeben sich dann folgende Entscheidungsschritte:

Abbildung 2: Bestimmung der relativen Optima bei vorwärtsschreitender Optimierung.



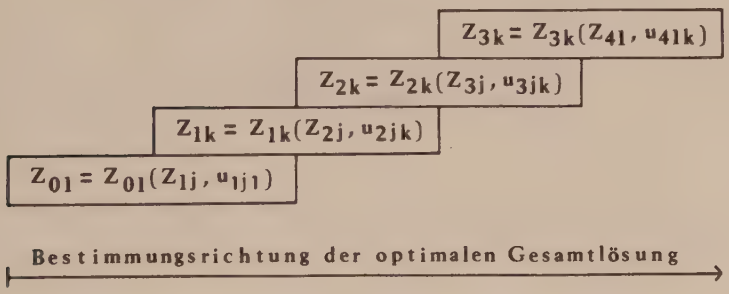
Die Abbildung 2 zeigt, daß eine Optimierung nur dann vorgenommen werden kann, wenn die relativ optimalen Zustände in den vorhergehenden Entscheidungsschritten ermittelt worden sind. Dadurch wird z.B. die Optimierung des Endzustandes indirekt (über die relativ optimalen Werte der vorgelagerten Stufen) auch vom Anfangszustand abhängig.

Liegt der optimale Wert der letzten Stufe vor, dann kann auch der vorteilhafteste Weg für das gesamte System bestimmt werden. Dazu muß das Netzwerk ein zweites Mal in entgegengesetzter Richtung zu den Planungsschritten durchlaufen werden. Dies wird durch den in Abbildung 2 angegebenen Pfeil verdeutlicht. Mit Hilfe der bekannten Übergänge lassen sich stufen-

weise diejenigen relativ optimalen Zustände erfassen, die den Weg der besten Gesamtlösung charakterisieren.[1)]

Für die rückwärtsschreitende Optimierung gilt eine analoge Vorgehensweise. Aufgrund der geänderten Entscheidungsrichtung bestimmen sich die Z_{ik} in Abhängigkeit von den $Z_{i+1,j}$ und den Übergängen $u_{i+1,j,k}$. Damit ergeben sich für das obige Netzwerk die in Abbildung 3 dargestellten Entscheidungsschritte.

Abbildung 3: Bestimmung der relativen Optima bei rückwärtsschreitender Optimierung.



Der optimale Weg für das gesamte System kann auch bei diesem Verfahren nur dadurch festgelegt werden, daß das Netzwerk zweimal durchlaufen wird. Da die Optimierung rückwärtsschreitend erfolgt, muß die Ermittlung der zur Gesamtlösung gehörenden Werte entgegengesetzt - also vorwärtsschreitend - vorgenommen werden (vgl. den Pfeil in Abbildung 3).

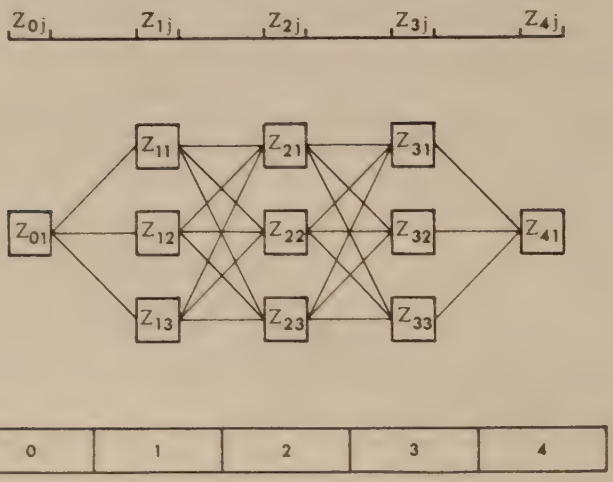
Mit der dynamischen Programmierung - gleichgültig ob vorwärts- oder rückwärtsschreitend - wird für jeden Knotenpunkt nur noch ein relativ optimaler Zustand bestimmt. Alle übrigen theoretisch möglichen Zustände werden schrittweise als ineffizient eliminiert. Dadurch

---

1) Vgl. auch Abschnitt 3.4

wird das System der Abbildung 1 in das der Abbildung 4 überführt:

Abbildung 4: Schematische Darstellung der mit Hilfe der dynamischen Programmierung ermittelten relativen Optima eines mehrstufigen Entscheidungsproblems (vgl. Abbildung 1).



Man muß jedoch beachten, daß der Wert der relativ optimalen Zustände für vorwärts- und rückwärtsschreitende Optimierungen unterschiedlich hoch ist.

Bevor die Rekursionsbeziehungen mathematisch formuliert werden können, muß die Zielvorstellung bekannt sein. Die Optimierung kann sowohl einen maximalen als auch minimalen Wert anstreben. In der Produktionsplanung könnte es sich dabei um eine Kostenminimierung einerseits und eine Gewinn- bzw. Deckungsbeitragsmaximierung andererseits handeln. Da sich die Zielfunktion für beide Extremwerte in analoger Weise aufstellen läßt, soll sie hier nur für eine Minimierung entwickelt werden. Zunächst wird die vorwärtsschreitende Optimierung unterstellt.

Der Wert für den relativ optimalen Zustand j in der Stufe i(Z_{ij}) sei durch $F_i(Z_{ij})$ definiert. Für den Übergang vom Zustand k der Stufe i - 1 zum Zustand j der Stufe i wird der Wert durch $f_i(u_{ijk})$ angegeben. Im ersten Entscheidungsschritt ergeben sich die relativen Optima der ersten Stufe durch folgende Beziehungen:

(3.1) $F_1(Z_{11}) = \text{Min} \left[F_o(Z_{o1}) + f_1(u_{111})\right]$

(3.2) $F_1(Z_{12}) = \text{Min} \left[F_o(Z_{o1}) + f_1(u_{121})\right]$

(3.3) $F_1(Z_{13}) = \text{Min} \left[F_o(Z_{o1}) + f_1(u_{131})\right]$

Für die Ermittlung des relativen Optimums im Knotenpunkt 1 der Stufe 2 gilt dann:

(3.4) $F_2(Z_{21}) = \text{Min} \left[F_1(Z_{1k}) + f_2(u_{21k})\right]$

Daraus läßt sich die allgemeine Formulierung für den relativ optimalen Zustand j in der Stufe i ableiten:

(3.5) $F_i(Z_{ij}) = \text{Min} \left[F_{i-1}(Z_{i-1,k}) + f_i(u_{ijk})\right]$

Für die letzte Stufe (n) gilt entsprechend:

(3.6) $F_n(Z_{nj}) = \text{Min} \left[F_{n-1}(Z_{n-1,k}) + f_n(u_{njk})\right]$

Diese Zielfunktion führt dann zur besten Gesamtlösung, wenn in der letzten Stufe nur ein relativ optimaler Zustand auftritt. Ergeben sich jedoch mehrere relative Optima, so muß der Zustand ausgewählt werden, der den geringsten Wert aufweist. Wird er durch s charakterisiert, dann muß die Bedingung

(3.7) $F_n(Z_{ns}) = \text{Min} \left[F_n(Z_{n,j})\right]$

zusätzlich erfüllt sein.

Bei rückwärtsschreitender Optimierung lassen sich - unter Beibehaltung der Symbolik - folgende Rekursionsbeziehungen aufstellen. Die relativen Optima der vorletzten Stufe ergeben sich im ersten Entscheidungsschritt durch folgende Gleichungen:

$$(3.8) \quad F_3(Z_{31}) = \text{Min} \left[F_4(Z_{41}) + f_4(u_{411}) \right]$$

$$(3.9) \quad F_3(Z_{32}) = \text{Min} \left[F_4(Z_{41}) + f_4(u_{412}) \right]$$

$$(3.10) \quad F_3(Z_{33}) = \text{Min} \left[F_4(Z_{41}) + f_4(u_{413}) \right]$$

Der Wert für den relativ optimalen Zustand 1 der Stufe 2 bestimmt sich dann durch:

$$(3.11) \quad F_2(Z_{21}) = \text{Min} \left[F_3(Z_{3j}) + f_3(u_{3j1}) \right]$$

Allgemein gilt für den Zustand k der Stufe i:

$$(3.12) \quad F_i(Z_{ik}) = \text{Min} \left[F_{i+1}(Z_{i+1,j}) + f_{i+1}(u_{i+1,j,k}) \right]$$

Die Zielfunktion für die erste Stufe - hier mit null bezeichnet - lautet entsprechend:

$$(3.13) \quad F_o(Z_{ok}) = \text{Min} \left[F_1(Z_{1,j}) + f_1(u_{1,j,k}) \right]$$

Treten in dieser Stufe mehrere relative Optima auf, so muß die Bedingung

$$(3.14) \quad F_o(Z_{os}) = \text{Min} \left[F_o(Z_{ok}) \right]$$

zusätzlich erfüllt sein.

3.4 Die Berechnung eines Zahlenbeispiels

Die allgemeinen Ausführungen der vorhergehenden Abschnitte sollen nun an einem Zahlenbeispiel verdeutlicht werden. Das in Abbildung 1 dargestellte Netzwerk kann als Grundlage für das folgende stark vereinfachte Produktionsplanungsproblem gelten.

Ein Halbfabrikat in der Stufe null muß i Produktionsstufen bis zum Fertigfabrikat durchlaufen. In jeder Stufe stehen verschiedene Produktiveinheiten zur Verfügung, die alternativ eingesetzt werden können. Sie werden in dem Netzwerk durch die Knotenpunkte charakterisiert. Die Reihenfolge der Stufen gibt den einzuhaltenden Ablauf des Produktionsprozesses an. Jedes Aggregat einer Stufe kann entsprechend der eingezeichneten Übergänge von jedem der vorhergehenden Stufe erreicht werden. Dabei ergeben sich unterschiedliche Kosten, die z.B. durch die Produktion und den Transport hervorgerufen werden können.

Das Ziel der Planung besteht darin, die gesamten variablen Kosten (Kv) zu minimieren. Werden die variablen Kosten der Stufe i durch Kv_i definiert, dann gilt als Zielbedingung:

$$(3.15) \qquad Kv = \text{Min} \sum_{i=0}^{4} Kv_i$$

Für die Anwendung der dynamischen Programmierung muß diese Beziehung zunächst in die für das Verfahren adäquate Zielfunktion transformiert werden. Mit $f_i(u_{ijk})$ werden die Kosten für den Übergang von der Maschine k der Stufe i - 1 zu der Maschine j der Stufe i angegeben. Da die Transport- und Produktionskosten in diesem System jeweils zusammengefaßt werden können, wird $f_i(u_{ijk})$ so definiert, daß es neben den Transportkosten auch die Produktionskosten für die Maschine j umfaßt. Die entsprechenden Werte sind in Abbildung 5 den einzelnen Übergängen zugeordnet.

Bei der vorwärtsschreitenden Optimierung werden dann durch $F_i(Z_{ij})$ die minimalen variablen Kosten vom Anfangszustand der Stufe o bis zum Zustand j der Stufe i (einschließlich der Produktionskosten für die Maschine j) wiedergegeben. Analog zu den Ausführungen in Abschnitt 3.3 ergibt sich damit für die letzte Stufe des Systems die folgende Zielfunktion:

$$(3.16) \quad F_4(Z_{41}) = \text{Min} \left[F_3(Z_{3k}) + f_4(u_{41k}) \right]$$

Die Minimierung der vorliegenden Planungsaufgabe erfolgt durch einen reinen Wertevergleich. Entsprechend der dritten Voraussetzung für die Anwendung der dynamischen Programmierung dürfen künftige Entscheidungen keinen Einfluß auf vergangene Entwicklungen ausüben.[1)] So kann die Optimierung dieses Problems keine Veränderung der variablen Kosten für das Halbfabrikat bis zur Fertigungsstufe null verursachen. Da außerdem keine alternativen Zustände für die Stufe null existieren, verhalten sich die bis dahin ermittelten Kosten völlig neutral gegenüber dem künftigen Produktionsablauf. Zur Vereinfachung kann der Ausgangszustand deshalb mit null bewertet werden.

Die schrittweise Optimierung erfolgt unter Berücksichtigung der in der vorhergehenden Stufe bestimmten minimalen Kosten und den zugehörigen Übergangskosten. Entsprechend der aufgestellten Zielbedingung muß die Summe dieser Werte ein Minimum ergeben.

In der ersten Stufe erübrigt sich eine Entscheidung, da für jeden Zustand nur ein Übergang existiert. Die relativen Optima ergeben sich aus dem Wert des Anfangszustandes (= 0) und den jeweiligen Übergangskosten (= 3,5,2). Zur Veranschaulichung werden die $F_1(Z_{1j})$ in die entsprechende Knotenpunkte eingetragen.

---

1) Vgl. S. 30

Im zweiten Planungsschritt müssen diese Werte bei der Optimierung berücksichtigt werden. Für jeden Knotenpunkt existieren drei mögliche Übergänge, von denen derjenige auszuwählen ist, der mit dem zugehörigen Optimum der vorhergehenden Stufe die geringsten variablen Kosten verursacht. So kann z.B. der erste Knotenpunkt der zweiten Stufe über Z_{11}, Z_{12} und Z_{13} erreicht werden. Die entsprechenden Kosten betragen 9(=3+6), 7(=5+2) und 8(=2+6). Der optimale Weg für Z_{21} führt also über Z_{12}, wobei $F_2(Z_{21})$ den Wert 7 annimmt. Dieses Ergebnis wird in den betrachteten Knotenpunkt geschrieben. Ergeben sich mehrere gleich günstige Übergänge, so können diese alternativ benutzt werden.

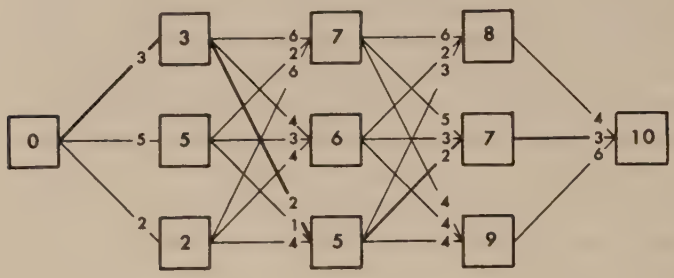
Die verbleibenden relativen Optima lassen sich in analoger Weise bestimmen. Das Kostenminimum ergibt sich für Z_{22} beim Übergang von Z_{13} [$F_2(Z_{22})$ = 2+4 = 6] und für Z_{23} beim Übergang von Z_{11} [$F_2(Z_{23})$ = 3+2 = 5] .

Wird diese Optimierung über alle Stufen durchgeführt, so nimmt der Endzustand den Wert 10 an. Daraus folgt, daß die Kosten des optimalen Weges für das gesamte Netzwerk 10 Einheiten betragen.

Der kostenminimale Produktionsablauf kann nun in entgegengesetzter Richtung zu den Planungsschritten ermittelt werden. Aufgrund der bekannten Werte der relativen Optima und den Übergangskosten lassen sich schrittweise die Zustände bestimmen, die den günstigsten Weg determinieren.

Dazu muß jeweils der Übergang ausgewählt werden, durch den das System der vorhergehenden Stufe bei der Optimierung in den betrachteten Zustand überführt wurde. Für den Endzustand ist dies der Übergang von Z_{32}. Er wird dadurch charakterisiert, daß die Summe aus den Übergangskosten und den minimalen Kosten von Z_{32} gleich dem Wert des Endzustandes ist.

Abbildung 5: Bestimmung der minimalen variablen Kosten mit Hilfe der dynamischen Programmierung durch die vorwärtsschreitende Optimierung.



Im folgenden Schritt muß der optimale Übergang von der Stufe 2 in den Zustand Z_{32} ermittelt werden. Analog gilt auch hier die Beziehung:

$$(3.17) \qquad F_2(Z_{2k}) + f_2(u_{32k}) = F_3(Z_{32})$$

Bezeichnen wir den zur Gesamtlösung gehörenden Zustand der Stufe i mit s, dann ergibt sich der gesuchte Übergang von der vorhergehenden Stufe aus der Bedingung:

$$(3.18) \qquad F_{i-1}(Z_{i-1,k}) + f_i(u_{isk}) = F_i(Z_{is})$$

Existieren mehrere gleichgünstige Wege, dann müssen die optimalen Übergänge für jeden möglichen Ablauf isoliert ermittelt werden. Die Gesamtlösung weist dementsprechend vom betrachteten Zustand bis zur Stufe null verschiedene alternative Teilstrecken auf.

Wird das vorliegende Netzwerk in der angegebenen Weise durchlaufen, so erhalten wir den optimalen Weg, der vom Anfangszustand über Z_{11}, Z_{23} und Z_{32} zum Endzustand führt. Er wird in Abbildung 5 durch die stärker ausgezogene Linie angedeutet. Das Ergebnis der Produktionsplanung würde besagen, daß in der Stufe 1

die Produktiveinheit 1, in der Stufe 2 die Produktiveinheit 3 und in der Stufe 3 die Produktiveinheit 2 eingesetzt werden müßten, um die variablen Kosten zu minimieren.

Das gleiche Resultat ergibt sich bei der rückwärtsschreitenden Optimierung. Ausgangspunkt ist hier der Endzustand der vierten Stufe. Dieser muß mit null bewertet werden, da $f_i(u_{ijk})$ aufgrund der obigen Definition bereits die Produktionskosten für die Maschine j der nachfolgenden Stufe enthält. Bei dieser Vorgehensweise werden die relativen Optima in Abhängigkeit von den Werten der nachgelagerten Stufe bestimmt. Mit $F_i(Z_{ik})$ werden die minimalen variablen Kosten vom Endzustand bis zum Zustand k der Stufe i angegeben, wobei die Produktionskosten für die Maschine k noch nicht berücksichtigt sind. Die Zielfunktion für die Stufe null lautet dann:

$$(3.19) \qquad F_o(Z_{o1}) = \text{Min} \left[F_1(Z_{1j}) + f_1(u_{1j1})\right]$$

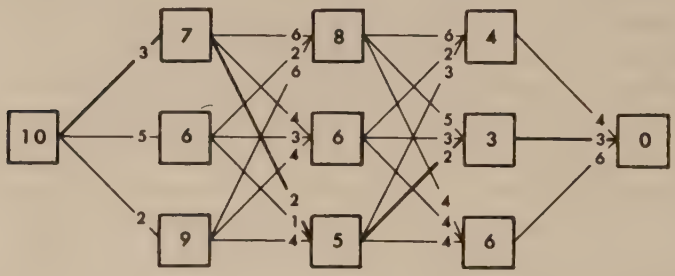
Das Optimierungsverfahren der vorwärtsschreitenden Planung kann hier in entgegengesetzter Richtung angewendet werden.

Im ersten Schritt erübrigt sich eine Entscheidung, da von jedem Knotenpunkt der Stufe 3 nur ein Übergang in die Stufe vier führt. Die Summe aus dem Wert des Endzustandes (=0) und den jeweiligen Übergangskosten (= 4,3,6) wird in den zugehörigen Knotenpunkt geschrieben.

Im zweiten Planungsschritt muß für alle Z_{2k} der kostenminimale Weg ermittelt werden. Der erste Knotenpunkt der zweiten Stufe kann z.B. über Z_{31}, Z_{32} und Z_{33} erreicht werden. Die entsprechenden Kosten betragen 10(=6+4), 8(=5+3) und 10(=4+6). Für Z_{21} ist also der Übergang von Z_{32} optimal. $F_2(Z_{21})$ erhält den Wert 8, der in den Knotenpunkt eingetragen wird.

In gleicher Weise muß das gesamte Netzwerk bis zum Anfangszustand der Stufe null durchlaufen werden. Abbildung 6 enthält die minimalen Kosten, die sich bei der rückwärtsschreitenden Optimierung ergeben.

Abbildung 6: Bestimmung der minimalen variablen Kosten mit Hilfe der dynamischen Programmierung durch die rückwärtsschreitende Optimierung.



Der vorteilhafteste Weg wird nun schrittweise in entgegengesetzter Richtung bestimmt. Zunächst muß der Übergang ermittelt werden, durch den das System bei der Optimierung in den Anfangszustand überführt wurde.

Im vorliegenden Beispiel ist dies der Übergang von Z_{11}, wobei die Summe aus den Übergangskosten und den minimalen Kosten für Z_{11} gleich dem Wert des Anfangszustandes ist. Im zweiten Schritt wird der optimale Weg für Z_{11} ausgewählt, für den die Bedingung

$$F_2(Z_{2j}) + f_2(u_{2j1}) = F_1(Z_{11}) \qquad (3.20)$$

erfüllt sein muß. Allgemein gilt für den gesuchten Übergang des als optimal bestimmten Zustandes s der Stufe i die Beziehung:

$$F_{i+1}(Z_{i+1,j}) + f_{i+1}(u_{i+1,j,s}) = F_i(Z_{is}) \qquad (3.21)$$

Die so ermittelten Teilstrecken ergeben zusammen den kostenminimalen Weg für das gesamte Netzwerk. Dieser Ablauf wird durch die stärker ausgezogene Linie in Abbildung 6 verdeutlicht. Ein Vergleich mit der Abbildung 5 zeigt, daß die rückwärts- und vorwärtsschreitenden Optimierungen zum gleichen Ergebnis führen.

Damit sind die wesentlichen Eigenschaften der dynamischen Programmierung charakterisiert.

Im folgenden Abschnitt soll anhand einiger ausgewählter Beispiele der Literatur gezeigt werden, in welcher Weise sich die dynamische Programmierung auf verschiedene Probleme der Produktionsplanung anwenden läßt.

4 Ausgewählte Anwendungsbeispiele der dynamischen Programmierung im Rahmen der Produktionsplanung

In diesem Teil der Arbeit werden verschiedene Beispiele der Produktionsplanung diskutiert, die mit Hilfe der dynamischen Programmierung gelöst werden können. Besondere Beachtung finden dabei die Lösungsansätze, die eine simultane Optimierung mehrerer Perioden ermöglichen.

4.1 Ein spezielles Produktionsplanungsproblem

Dieses Modell wurde von Künzi für eine besondere Planungsaufgabe aus der Computerbranche entwickelt.[1] Folgende Annahmen liegen der Untersuchung zugrunde:

Ein Computerproduzent will in zwei Jahren seinen bisherigen Elektronenrechner durch ein neues Modell ersetzen. Die Bestandteile der alten Anlage werden dann wertlos. Bis dahin besteht jedoch die Möglichkeit, daß noch Ersatzteile für die alte Serie angefordert werden. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß jährlich ein Trommelspeicher benötigt wird, sei 1/3. Für einen Verbrauch von mehr als einen Trommelspeicher wird die Wahrscheinlichkeit mit 0 angegeben. Die Herstellungskosten betragen für einen Trommelspeicher 5.000 Dollar. Bei zwei Trommelspeichern in einer Periode entstehen 7.000 Dollar variable Produktionskosten. Wird ein Speicher angefordert, wenn das Lager leer ist, dann kann ein Trommelspeicher aus einer eigenen Anlage ausgebaut werden. Die dadurch entstehenden Ausfallkosten werden auf 14.400 Dollar geschätzt.

Das Ziel dieser Aufgabe besteht nun darin, die erwarteten Kosten (EK) zu minimieren. Am Anfang des ersten Jahres muß eine Entscheidung darüber getroffen werden, wieviel Trommelspeicher hergestellt

---

1) Vgl. H.P.KÜNZI, C.MÜLLER, E.NIEVERGELT, a.a.O., S.14 ff.

werden sollen. Da in jeder Periode maximal nur ein Speicher angefordert wird, kann sich die Untersuchung auf die Produktion von 0,1 und 2 Trommelspeichern beschränken. Sofern der Lagerbestand am Ende des ersten Jahres gleich null ist, muß eine zweite Entscheidung darüber erfolgen, ob ein weiterer Trommelspeicher hergestellt werden soll oder nicht.

Die theoretisch möglichen Zustände und Übergänge des gesamten Problems werden in der Abbildung 7 dargestellt.[1)]

Die Minimierung der erwarteten Kosten erfolgt durch die rückwärtsschreitende Optimierung. In dem vorliegenden Netzwerk existieren drei mögliche Endzustände (L,M und N), die jeweils mit 0 bewertet werden können, da eventuell noch vorhandene Trommelspeicher am Ende des zweiten Jahres für den Produzenten wertlos geworden sind. Am Anfang des zweiten Jahres treten die Zustände H, J und K auf, für die die erwarteten Kosten bis zu den möglichen Endzuständen bestimmt werden müssen. Diese ergeben sich dadurch, daß die Einzelwahrscheinlichkeiten der Übergänge mit den erwarteten Kosten des nachfolgenden Zustandes und den eventuell auftretenden Ausfallkosten multipliziert werden und anschließend die Summe aus diesen Produkten gebildet wird.

Dementsprechend gilt z.B. für den Zustand H:

(41.1) $$EK_H = 2/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot 0 = 0 \text{ Dollar}$$

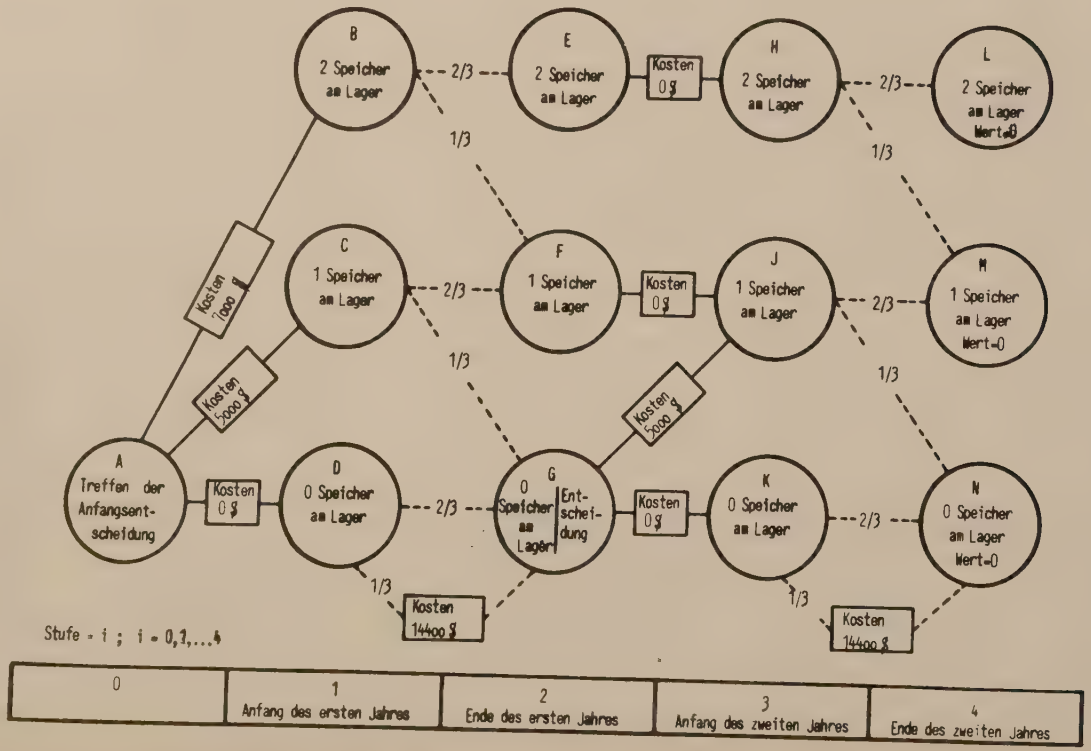
In gleicher Weise werden die erwarteten Kosten für J und K ermittelt und in die zugehörigen Knotenpunkte eingetragen (vgl. Abbildung 8).

Am Ende des ersten Jahres muß im Zustand G eine Entscheidung getroffen werden, wobei das System alternativ in die Zustände J und K überführt werden kann.

---

1) Die Abbildungen 7 und 8 wurden mit geringfügigen Änderungen aus der Arbeit von KÜNZI übernommen; vgl. H.P.KÜNZI, O.MÜLLER, E.NIEVERGELT, a.a.O., S.14 u. 15

Abbildung 7: Graphische Darstellung der verschiedenen Ablaufmöglichkeiten in den nächsten beiden Jahren, die der Computerproduzent berücksichtigen muß.



Die entsprechenden Kosten betragen 5.000 Dollar (= 5.000 Dollar + 0 Dollar) bzw. 4.800 Dollar (= 0 Dollar + 4.800 Dollar), von denen das Minimum ausgewählt wird. Für die Zustände E und F existiert jeweils nur ein Übergang, so daß eine Optimierung entfällt. Die Summe aus Produktionskosten und erwarteten Kosten des nachfolgenden Zustandes ergibt für beide Knotenpunkte den Wert 0. Im nächsten Schritt werden die Erwartungswerte für die Zustände B, C und D bestimmt. Die Berechnung erfolgt in gleicher Weise wie zu Beginn des zweiten Jahres. So gilt für den Zustand B:

(41.2) $EK_B = 2/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot 0 = 0$ Dollar

für den Zustand C:

(41.3) $EK_C = 2/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot 4.800 = 1.600$ Dollar

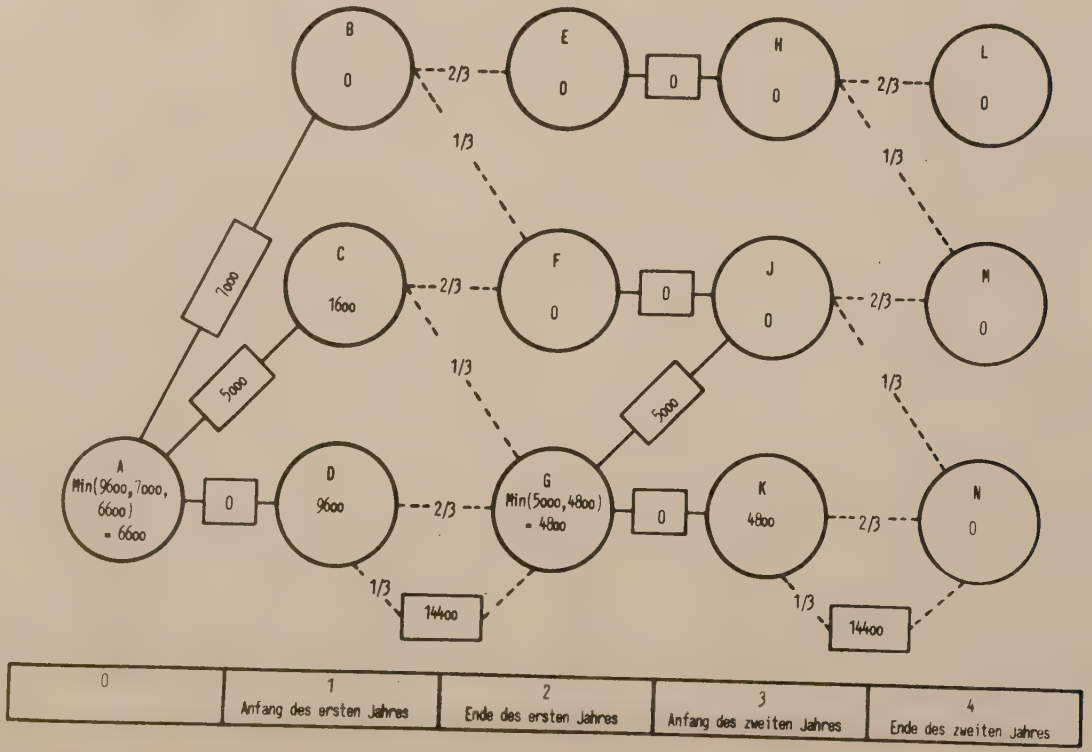
für den Zustand D:

(41.4) $EK_D = 2/3 \cdot 4.800 + 1/3 \cdot (14.400 + 4.800)$

$= 9.600$ Dollar

Anschließend werden die minimalen erwarteten Kosten für den Ausgangszustand A ermittelt. Das System kann über B, C und D in diesen Knotenpunkt überführt werden. Die entsprechenden Erwartungswerte betragen 7.000, 6.600 und 9.600 Dollar. Aufgrund der Zielvorstellung erweist sich der Weg über C mit 6.600 Dollar als optimal. Damit liegen für alle Knotenpunkte des Netzwerkes die minimalen erwarteten Kosten bis zum Planungsende vor. Diese relativen Optima werden in der Abbildung 8 wiedergegeben.

Abbildung 8: Bestimmung der minimalen variablen Kosten mit Hilfe der dynamischen Programmierung für sämtliche theoretisch möglichen Zustände der nächsten beiden Jahre.



In entgegengesetzter Richtung zum Optimierungsverfahren läßt sich nun der kostengünstigste Weg für das gesamte System bestimmen. Da nur ein Ausgangszustand existiert, gehört der als optimal ermittelte Übergang von A nach C zur Gesamtlösung. Dieses Ergebnis besagt, daß zu Beginn des ersten Jahres ein Trommelspeicher hergestellt werden muß. Vom Knotenpunkt C kann das System mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten in die Zustände F und G übergehen. Sofern am Ende des ersten Jahres noch ein Speicher vorhanden ist (Zustand F), kann nur der Übergang von F nach J realisiert werden. Das bedeutet, daß eine weitere Produktion unterbleibt. Dabei ist es gleichgültig, ob die künftige Entwicklung in den Endzustand M oder N führt.

Ergibt sich am Ende des ersten Jahres der Zustand G, dann muß der optimale Übergang zur nächsten Stufe ausgewählt werden. Damit geht das System in den Zustand K über. Das bedeutet für die Produktionsplanung, daß auch in dieser Situation keine Trommelspeicher hergestellt werden sollten. Allerdings muß mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3 damit gerechnet werden, daß im Laufe des zweiten Jahres ein Trommelspeicher aus einer eigenen Anlage ausgebaut werden muß.

Mit diesen Ausführungen sind die notwendigen Produktionsentscheidungen für alle Teilstrecken des optimalen Weges charakterisiert.

Das Modell zeigt, daß die dynamische Programmierung auch dann angewendet werden kann, wenn unterschiedliche Rechenoperationen in den einzelnen Stufen erforderlich sind. Ein weiterer Vorteil besteht darin, daß auch Einzelwahrscheinlichkeiten für die Absatzentwicklung berücksichtigt werden. Darüber hinaus läßt sich dieses Beispiel in gleicher Weise auf mehr als zwei Perioden anwenden, wobei ein Diskontierungsfaktor eingeführt werden könnte. Schließlich kann

die Optimierung auch für eine größere Absatzmenge erfolgen. Der erforderliche Rechenaufwand wächst dadurch jedoch sehr rasch an.

Der Nachteil dieses Modells besteht darin, daß von den in Abschnitt 3 aufgeführten Determinanten der Produktionsplanung nur die Absatz- und Herstellungsmengen bzw. Fertigungsgrößen erfaßt werden können. Der praktische Anwendungsbereich wird damit sehr stark eingeengt.

4.2 Produktionsplanung und Lagerhaltung

In diesem Abschnitt folgen einige Modelle, mit denen ein optimaler Produktionsplan für mehrere Perioden unter Berücksichtigung von Lagerhaltungskosten aufgestellt werden kann.

4.2.1 Das Modell von WAGNER und WHITIN

Der erste Lösungsansatz mit Hilfe der dynamischen Programmierung für eine simultane Optimierung von Produktions- und Lagerhaltungskosten wurde von Wagner und Whitin entwickelt.[1] Dieses Modell ist in der Literatur vielfach diskutiert und hinsichtlich einzelner Prämissen erweitert worden.[2] Im folgenden wird zunächst die Struktur des Planungsproblems charakterisiert.

Die Untersuchung geht von einem Zeitraum aus, der in einzelne Perioden (z.B. Wochen, Monate oder Jahre) unterteilt wird. Die Länge der Zeitabschnitte kann dabei unterschiedlich sein. Wesentlich ist, daß die Nachfrage für jede Periode zu Beginn der Planung exakt vorhergesagt werden kann. Der Vorzug dieses Modells besteht darin, daß sich die Optimierung auf beliebige Absatzentwicklungen anwenden läßt. Allerdings kann jeweils nur ein Erzeugnis berücksichtigt werden. Die Produktion erfolgt jeweils zu Beginn einer Periode mit unendlicher hoher Produktionsgeschwindigkeit. Deshalb ist ein Lagerzugang auch nur am Anfang eines Zeitabschnittes möglich. Über den

---

1) Vgl. H.M.WAGNER und T.M.WHITIN, Dynamic Version of the Economic Lot Size Model, in: Management Science 1959, S.89-96

2) Vgl. G.D.EPPEN, F.J.GOULD und P.B.PASHIGIAN, Extensions of the Planing Horizon Theorem in the Dynamic Lot Size Model, in: Management Science 1969, S.269-277; G.HADLEY und T.M.WHITIN, A Family of Dynamic Inventory Models, in: Management Science 1962, S.458-469; G.HADLEY, Nichtlineare Programmierung, a.a.O., S.460 ff.; D.OHSE, Lagerhaltungsmodelle für deterministisch schwankenden Absatz, in: Ablauf- und Planungsforschung 1969, S.309 ff.

Ablauf der Nachfrage innerhalb einer Periode werden keine Annahmen gemacht, da sie aufgrund der unendlich hohen Produktionsgeschwindigkeit in jedem Falle rechtzeitig befriedigt werden kann. Eine weitere Bedingung fordert, daß die in einem Los herzustellende Produktionsmenge mit dem Bedarf einer oder mehrerer Perioden genau übereinstimmt. Schließlich wird unterstellt, daß am Ende des Planungszeitraums kein Lagerbestand übrigbleibt. Das Ziel der Optimierung besteht darin, die gesamten losabhängigen Kosten bis zum Planungsende zu minimieren. Die entsprechenden Lose der einzelnen Perioden werden schrittweise mit dem von Wagner und Whitin entwickelten Algorithmus bestimmt.

Die Berechnung erfolgt vorwärtsschreitend mit einem variablen Planungshorizont. In jedem Schritt wird eine weitere Periode in die Betrachtung einbezogen. Unter Berücksichtigung der in der vorhergehenden Stufe ermittelten Kosten werden für sämtliche Produktionsalternativen von der ersten Periode bis zum Planungshorizont die losabhängigen Kosten ermittelt und das Minimum ausgewählt. Diese Iteration wird solange fortgesetzt, bis die letzte Periode des Planungsproblemserreicht ist. Vom Minimum der letzten Stufe ausgehend kann dann rückwärtsschreitend für jeden Zeitabschnitt das optimale Los bestimmt werden.

Dieses Verfahren soll nun anhand eines Zahlenbeispiels verdeutlicht werden.[1] Der gesamte Planungszeitraum erstreckt sich auf die Monate Januar bis Mai, für die der in Tabelle 1 angegebene Bedarf festgestellt wurde:

---

1) Das folgende Zahlenbeispiel wurde der Arbeit von OHSE entnommen; D.OHSE, a.a.O., S.310 ff.

Tabelle 1: Monatliche Nachfrage für den Planungszeitraum von Januar bis Mai.

Monatlicher Bedarf $= B_j$; $j = 1,2,\ldots 5$

Monat	1 Januar	2 Februar	3 März	4 April	5 Mai
Bedarf in Mengeneinheiten	80	100	125	100	50

Zu Beginn der Produktion fallen Rüstkosten (K_R) in Höhe von 60 Geldeinheiten (GE) an. Die variablen Produktionskosten je Stück (k_p) sind konstant und betragen 20 GE. Die Lagerkosten für eine Mengeneinheit (ME) einschließlich der Zinsen für das im Lager gebundene Kapital werden mit p=2 % der variablen Produktionskosten je Stück angegeben. Die minimalen losabhängigen Kosten für die ersten j Monate werden durch F_j charakterisiert. F_{ij} gibt die minimalen losabhängigen Kosten für den Bedarf der Monate i bis j an, unter der Bedingung, daß diese Menge in einem Los zu Beginn der Periode i gefertigt wird. Da die Optimierung auf die losabhängigen Kosten beschränkt werden kann, bleiben die als konstant unterstellten Stückkosten der Produktion unberücksichtigt.

Im ersten Planungsschritt wird nur der Monat Januar betrachtet. Die nachgefragte Menge muß zu Beginn der Periode hergestellt werden, wobei Rüstkosten in Höhe von 60 GE anfallen. Eine alternative Produktionsmöglichkeit besteht nicht. Da die Lagerhaltungskosten für den Januarbedarf aufgrund der Modellprämissen unvermeidbar sind, betragen die losabhängigen Kosten der ersten Periode:

(421.1) $$F_{11} = 60$$

Dementsprechend gilt für F_1:

(421.2) $$F_1 = \text{Min} \left[F_{11} \right] = 60$$

Im zweiten Planungsschritt werden die ersten beiden Monate zusammengefaßt. Es ergeben sich zwei Fertigungsalternativen:

1. Man fertigt die nachgefragte Menge für beide Perioden im Januar. Dadurch werden die losabhängigen Kosten F_{11} um die Lagerhaltungskosten für den Februarbedarf im Januar erhöht:

(421.3) $$F_{12} = F_{11} + B_2 \cdot k_p \cdot p = 60 + 100 \cdot 20 \cdot 0{,}02 = 100$$

2. Die im Februar benötigte Menge wird erst zu Beginn der zweiten Periode hergestellt. Neben den minimalen Kosten F_1 entstehen dann zusätzlich Rüstkosten im Monat Februar:

(421.4) $$F_{22} = F_1 + K_R = 60 + 60 = 120$$

Für die minimalen Kosten der ersten beiden Perioden gilt dann:

(421.5) $$F_2 = \text{Min} \begin{bmatrix} F_{12} \\ F_{22} \end{bmatrix} = \text{Min} \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \end{bmatrix} = F_{12} = 100$$

Im folgenden Schritt wird der Planungszeitraum um den Monat März erweitert. Dabei ergeben sich drei Fertigungsalternativen:

1. Im Januar kann der Bedarf für alle drei Monate hergestellt werden. Die bereits ermittelten Kosten F_{12} werden dann um die Lagerhaltungskosten für den Märzbedarf im Januar und Februar erhöht:

(421.6) $$F_{13} = F_{12} + 2 \cdot B_3 \cdot k_p \cdot p = 100 + 2 \cdot 125 \cdot 20 \cdot 0{,}02 = 200$$

2. Am Anfang der zweiten Periode kann der Bedarf für Februar und März gefertigt werden. Dabei ergeben sich die Kosten F_{22} und die Lagerhaltungskosten für den Märzbedarf im Monat

Februar:

$$(421.7)\quad F_{23} = F_{22} + B_3 \cdot k_p \cdot p$$
$$= 120 + 125 \cdot 20 \cdot 0{,}02 = 170$$

3. Schließlich kann der Bedarf für den Monat März auch zu Beginn der dritten Periode hergestellt werden. Neben den minimalen Kosten für die ersten beiden Zeitabschnitte fallen dann zusätzlich Rüstkosten im Monat März an. Es gilt die Beziehung:

$$(421.8)\quad F_{33} = F_2 + K_R = 100 + 60 = 160$$

Das Minimum dieser Alternativen ergibt sich aus der Bedingung:

$$(421.9)\quad F_3 = \text{Min} \begin{bmatrix} F_{13} \\ F_{23} \\ F_{33} \end{bmatrix} = \text{Min} \begin{bmatrix} 200 \\ 170 \\ 160 \end{bmatrix} = F_{33} = 160$$

Im vierten Planungsschritt werden die relativen Optima für den Zeitraum von Januar bis April ermittelt. Theoretisch existieren vier Fertigungsmöglichkeiten, da der Aprilbedarf im Januar, Februar, März oder April hergestellt werden könnte. Aufgrund der bisherigen Ergebnisse lassen sich jedoch zwei dieser Alternativen als ineffizient ausschließen. Die minimalen Kosten für die ersten drei Perioden werden dann realisiert, wenn der Märzbedarf im selben Monat hergestellt wird ($=F_{33}$). Das bedeutet, daß auch der Aprilbedarf ohne zusätzliche Rüstkosten im März angefertigt werden könnte. Gegenüber einer Produktion im Januar oder Februar ist diese Möglichkeit deshalb vorteilhafter, weil zumindest die Lagerkosten für die ersten beiden Monate evtl. aber auch Rüstkosten eingespart werden. Diese Überlegung kann für jeden Planungsschritt verallgemeinert werden:

Der kostenminimale Fertigungstermin für den Bedarf der Periode j kann nicht vor dem kostenminimalen Fertigungstermin für den Be-

darf der Periode j - 1 liegen.

Damit verbleiben nur zwei sinnvolle Fertigungstermine für den Aprilbedarf:

1. Die Produktion erfolgt im März. Die entsprechenden minimalen losabhängigen Kosten betragen:

$$(421.10)\quad F_{34} = F_{33} + B_4 \cdot k_p \cdot p = 160 + 100 \cdot 20 \cdot 0{,}02 = 200$$

2. Die Produktion erfolgt im April. Für die minimalen Kosten gilt:

$$(421.11)\quad F_{44} = F_3 + K_R = 160 + 60 = 220$$

Das Kostenminimum der ersten vier Perioden ergibt sich dann aus der Bedingung:

$$(421.12)\quad F_4 = \text{Min} \begin{bmatrix} F_{34} \\ F_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 220 \end{bmatrix} = F_{34} = 200$$

Im letzten Iterationsschritt wird das Optimum für den gesamten Planungszeitraum ermittelt. Aufgrund des Kostenminimums der vorhergehenden Stufe (F_{34}) verbleiben als sinnvolle Fertigungstermine für den Maibedarf die Monate März, April und Mai.

Die entsprechenden Kosten betragen:

$$(421.13)\quad F_{35} = F_{34} + 2 \cdot B_5 \cdot k_p \cdot p = 200 + 2 \cdot 50 \cdot 20 \cdot 0{,}02 = 240$$

$$(421.14)\quad F_{45} = F_{44} + B_5 \cdot k_p \cdot p = 220 + 50 \cdot 20 \cdot 0{,}02 = 240$$

$$(421.15)\quad F_{55} = F_4 + K_R = 200 + 60 = 260$$

Für die minimalen Kosten dieser Fertigungsalternativen gilt dann:

$$(421.16)\quad F_5 = \text{Min} \begin{bmatrix} F_{35} \\ F_{45} \\ F_{55} \end{bmatrix} = \text{Min} \begin{bmatrix} 240 \\ 240 \\ 260 \end{bmatrix} = F_{35} = F_{45} = 240$$

Bei einer optimalen Politik betragen also die losabhängigen Kosten für den gesamten Planungszeitraum 240 GE. Das Ergebnis zeigt, daß zwei kostenminimale Lösungen (F_{35} und F_{45}) existieren.

In Abbildung 9 werden die Resultate der einzelnen Iterationsschritte zusammengefaßt.[1)]

Abbildung 9: Lösungsschema für das Zahlenbeispiel von D.Ohse.

j	1	2	3	4	5
i \ B_j	80	100	125	100	50
1	60*	100*	200		
2		120	170		
3			160*	200*	240*
4				220	240*
5					260
i*	1	1	3	3	3;4

Die minimalen Kosten sind durch einen Stern gekennzeichnet.

i = Produktionsmonat

i* = der Monat, in dem der Bedarf der Periode j hergestellt werden muß, wenn das Kostenminimum des jeweiligen Planungshorizontes realisiert werden soll.

Die Bestimmung der entsprechenden Losgrößen für die einzelnen Monate erfolgt nun in entgegengesetzter Richtung zum Optimierungsverfahren. Zunächst wird der kostenminimale Fertigungstermin für den Maibedarf ermittelt. Aus F_{35} ergibt sich, daß sowohl die Nachfrage für den Monat Mai als auch für März und April in einem Los zu Beginn der dritten Periode hergestellt werden müssen. Die gesamte Produktionsmenge für März beträgt dann: 125 + 100 + 50 = 275 ME. Der günstigste Fertigungstermin für den Februarbedarf wird durch das Kostenminimum der ersten beiden Perioden ($F_2 = F_{12}$) festgelegt. F_{12} besagt, daß die Nachfragemenge für Februar - und damit auch für Januar - zu Beginn des Planungszeitraums produziert

1) Die Abbildung 9 wurde der Arbeit von OHSE entnommen; D.OHSE, a.a.O., S. 314

werden muß. Die entsprechende Losgröße im Monat Januar umfaßt dann 80 + 100 = 180 ME. Durch diese beiden Lose kann die gesamte Nachfrage mit den geringsten losabhängigen Kosten befriedigt werden.

Aus F_5 ergibt sich jedoch eine zweite optimale Fertigungsalternative, für die folgende Losgrößen bestimmt werden können. F_{45} gibt an, daß der Bedarf für April und Mai im April hergestellt werden muß (= 150 ME). Der Fertigungstermin für die Märznachfrage wird durch das Kostenminimum der ersten drei Perioden ($F_3 = F_{33}$) festgelegt. Danach müssen 125 ME im Monat März angefertigt werden. Schließlich folgt aus $F_2 = F_{12}$, daß auch bei dieser Fertigungsalternative der Bedarf für Januar und Februar im ersten Monat angefertigt werden muß (= 180 ME). Damit stehen auch die Lose für den zweiten kostenminimalen Produktionsplan fest.

Der Vorteil des von Wagner und Whitin entwickelten Verfahrens besteht darin, daß nicht nur eine, sondern sämtliche optimalen Lösungen erfaßt werden. Wie bereits eingangs erwähnt wurde, läßt sich der Algorithmus auch dann anwenden, wenn einzelne Prämissen des Modells abgeändert werden. In diesem Zusammenhang sei auf die Arbeit von Eppen verwiesen, der im Zeitablauf schwankende Rüst-, Lagerhaltungs- und Produktionskosten unterstellt.[1)]

Die Voraussetzungen des obigen Modells sind so gesetzt, daß die einzelnen Lose mit dem Bedarf einer oder mehrerer Perioden genau übereinstimmen. Im folgenden Abschnitt soll nun das von Shephard entwickelte Verfahren diskutiert werden, bei dem diese Bedingung nicht erfüllt zu sein braucht.

---

1) Vgl. G.D.EPPEN, F.J.GOULD und P.B.PASHIGIAN, a.a.O., S.89 ff.

4.2.2 Das Modell von SHEPHARD[1)]

Shephard geht von einem Produktionsplanungsproblem aus, das durch folgende Prämissen charakterisiert wird. Eine Planungsabteilung soll für ein Produkt den optimalen Produktionsplan des kommenden Jahres aufstellen. Der gesamte Zeitraum wird in einzelne Perioden unterteilt, wobei jeweils zwei Monate zu einem Zeitabschnitt zusammengefaßt werden. Die Nachfrage der einzelnen Perioden wird als bekannt vorausgesetzt und entspricht den in Tabelle 2 angegebenen Werten:

Tabelle 2: Nachfrage für die Perioden 1 bis 6

Periode	1	2	3	4	5	6
Benötigte Menge pro Periode	5	5	1o	3o	5o	8
Kumulierter Bedarf	5	1o	2o	5o	1oo	1o8

Außerdem wird unterstellt, daß der Absatz innerhalb eines Zeitabschnittes linear verläuft. Für die Produktion stehen zwei Schichten - eine Tag- und eine Nachtschicht - zur Verfügung. Die variablen Produktionskosten betragen:

100 Dollar pro ME während der Tagschicht
150 Dollar pro ME während der Nachtschicht

Die Produktionskapazität einer Periode wird für beide Schichten mit 15 ME angegeben. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß sowohl am Anfang als auch am Ende des

---

1) Vgl. W.SHEPHARD, Dynamic Programming, a.a.O., S.1 ff. Für das folgende Modell entwickelte SHEPHARD einen Algorithmus, bei dem in jedem Optimierungsschritt 2 Variable auftreten. Da dieses Iterationsverfahren auch in dem Beispiel von ELSNER (vgl. Abschnitt 4.2.3, Seite 89 ff.) angewendet wird und zu einer Weiterentwicklung der Modelle 1 und 2 im Abschnitt 5 herangezogen werden kann (vgl. S.136 und S. 147), soll das Optimierungsprinzip von SHEPHARD an dieser Stelle ausführlich dargestellt werden.

gesamten Planungszeitraums kein Lagerbestand vorhanden ist.[1] Die variablen Lagerkosten betragen 20 Dollar pro ME der Durchschnittsmenge, die innerhalb eines Zeitabschnittes gelagert wird. Das Ziel der Planung besteht nun darin, die gesamten variablen Produktions- und Lagerhaltungskosten des kommenden Jahres zu minimieren.

Bevor das Optimum mit Hilfe der dynamischen Programmierung ermittelt werden kann, müssen die Restriktionen dieses Modells mathematisch formuliert werden. Dazu werden folgende Symbole eingeführt:

i = Periode $(i = 1,2.....6)$

x_i = Produktionsmenge der Periode i

L_o = Lagerbestand zu Beginn der ersten Periode

L_i = Lagerbestand am Ende der Periode i

B_i = Nachfrage der Periode i

BK_i = kumulierte Nachfrage von der ersten Periode bis zur Periode i

$K_p(x)$ = variable Herstellungskosten für die Produktionsmenge x

Aufgrund der Kapazitätsgrenze muß für jeden Zeitabschnitt die Bedingung

$$x_i \leq 30$$

erfüllt sein. Außerdem wird gefordert, daß die gesamte Nachfrage rechtzeitig befriedigt werden kann. Das bedeutet, daß die Summe aus dem Anfangslagerbestand und den kumulierten Produktionsmengen am Ende jeder Periode mindestens so groß sein muß wie die jeweilige kumulierte Nachfrage. Damit ergeben sich für die einzelnen Zeitabschnitte folgende Nebenbedingungen:

---

1) Diese Beschränkung erleichtert die Berechnung des Optimums. Sie ist jedoch keine notwendige Voraussetzung für die Anwendung der dynamischen Programmierung.

Periode

1	$L_o + x_1$	$\geq BK_1$
2	$L_o + x_1 + x_2$	$\geq BK_2$
3	$L_o + x_1 + x_2 + x_3$	$\geq BK_3$
4	$L_o + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$	$\geq BK_4$
5	$L_o + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$	$\geq BK_5$
6	$L_o + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$	$\geq BK_6$

Die Differenz der beiden Seiten dieser Ungleichungen stellt den Lagerbestand am Ende der betreffenden Periode dar. Dementsprechend gelten auch die Transformationsbeziehungen:

Periode

1	L_1	$= L_o + x_1 - BK_1$
2	L_2	$= L_o + x_1 + x_2 - BK_2$
3	L_3	$= L_o + x_1 + x_2 + x_3 - BK_3$
4	L_4	$= L_o + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - BK_4$
5	L_5	$= L_o + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - BK_5$
6	L_6	$= L_o + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - BK_6$

oder:

Periode

1	L_1	$= L_o + x_1 - B_1$
2	L_2	$= L_o + x_2 - B_2$
3	L_3	$= L_o + x_3 - B_3$
4	L_4	$= L_o + x_4 - B_4$
5	L_5	$= L_o + x_5 - B_5$
6	L_6	$= L_o + x_6 - B_6$

wobei in dem vorliegenden Zahlenbeispiel die Bedingung $L_o = L_6 = 0$ zusätzlich erfüllt sein muß.

Für die Optimierung werden außerdem die Produktions- und Lagerhaltungskosten eines Zeitabschnittes benötigt.

Aufgrund der oben angegebenen Stückkosten der Produktion können folgende Kostenfunktionen für die einzelne Periode aufgestellt werden:

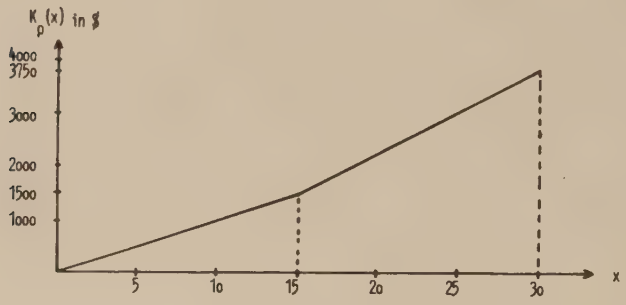
$$K_p(x) = 100\,x \qquad \text{für } 0 \leq x \leq 15$$

$$K_p(x) = 1500 + 150\,(x - 15) \text{ für } 15 < x \leq 30$$

$$= 150\,x - 750$$

Die entsprechende Kostenkurve wird in Abbildung 10 dargestellt.

Abbildung 10: Verlauf der variablen Produktionskosten innerhalb eines Zeitabschnittes.



Bei der Ermittlung der variablen Lagerhaltungskosten wird zunächst der durchschnittliche Lagerbestand eines Zeitabschnittes festgelegt. Da eine lineare Absatzentwicklung unterstellt wird, ergibt sich der durchschnittliche Lagerbestand für die Periode i durch $0{,}5\,(L_{i-1} + L_i)$. Multipliziert man diesen Ausdruck mit den Stückkosten für die Lagerung (= 20 Dollar), so erhält man die gesamten variablen Lagerhaltungskosten der Periode i:

$$20 \cdot 0{,}5\,(L_{i-1} + L_i) = 10\,(L_{i-1} + L_i)$$

Für diese Zusammenhänge kann nun mit Hilfe der dynamischen Programmierung der optimale Produktionsplan aufgestellt werden. Die Berechnung erfolgt rekursiv, wobei im ersten Iterationsschritt die Perioden 5 und 6 zusammengefaßt werden. Die optimale Produktionsmenge für diese beiden Zeitabschnitte hängt wesentlich von dem Lagerbestand zu Beginn der fünften Periode ab. Da unterstellt wird, daß der Lagerbestand am Ende eines Zeitabschnittes mit dem Anfangsbestand der nächsten Periode identisch ist, kann die Berechnung im ersten Planungsschritt auch unter Verwendung des Endbestandes der vierten Periode (L_4) erfolgen. Der optimale Wert für L_4 läßt sich jedoch erst angeben, wenn sämtliche Iterationsschritte durchgeführt worden sind. Deshalb muß zunächst für jeden theoretisch möglichen Lagerbestand am Ende der vierten Periode der kostengünstigste Produktionsplan bis zum Jahresende berechnet werden. Die realisierbaren L_4-Werte ergeben sich aus den Prämissen des Modells. Da $L_6 = 0$ ist und der gesamte Bedarf für die letzten beiden Perioden 58 ME beträgt, gilt die Beziehung:

(422.1) $$L_6 = L_4 + x_5 + x_6 - 58 = 0$$

Wird in den Zeitabschnitten 5 und 6 keine Produktion vorgenommen ($x_5 = x_6 = 0$), dann erhält L_4 den (zugleich maximalen) Wert 58. Das bedeutet, daß der Lagerbestand am Ende der vierten Periode kleiner oder gleich 58 sein muß:

(422.2) $$L_4 \leq 58$$

Um den Bedarf in der fünften Periode decken zu können, muß auch die Bedingung:

(422.3) $$L_4 + x_5 \geq 50$$

erfüllt sein. Da maximal 30 ME innerhalb eines Zeitabschnittes hergestellt werden können, ergibt sich aus

der Ungleichung (422.3) ein minimaler Wert für L_4 von 20 ME. Dementsprechend gelten für L_4 die Grenzen:

(422.4) $\quad 20 \leq L_4 \leq 58$

Aus (422.3) und der Kapazitätsbeschränkung folgen auch die Randwerte für x_5:

(422.5) $\quad 50 - L_4 \leq x_5 \leq 30$

Die Produktionsmenge in der sechsten Periode (x_6) wird durch die Gleichung (422.1) bestimmt. Explizit ergibt sich für x_6:

(422.6) $\quad x_6 = 58 - L_4 - x_5$

Da x_6 nicht negativ sein kann, muß auch die Bedingung

(422.7) $\quad x_6 = 58 - L_4 - x_5 \geq 0$

oder

(422.8) $\quad x_5 \leq 58 - L_4$

gelten. Für alle zulässigen Werte von L_4 ergeben sich damit die endgültigen Grenzen für x_5 durch:

(422.9) $$\text{Max} \begin{bmatrix} 0 \\ 50 - L_4 \end{bmatrix} \leq x_5 \leq \text{Min} \begin{bmatrix} 30 \\ 58 - L_4 \end{bmatrix}$$

Bei einem bestimmten Lagerbestand am Ende der vierten Periode kann x_5 alle Werte vom Maximum des ersten Ausdruckes der Beziehung (422.9) bis zum Minimum des zweiten Ausdruckes annehmen. Erhält L_4 z.B. den Wert 30, so ergibt sich für x_5:

$$\text{Max} \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix} \leq x_5 \leq \text{Min} \begin{bmatrix} 30 \\ 28 \end{bmatrix}$$

oder

$$20 \leq x_5 \leq 28$$

Neben L_4 tritt damit auch x_5 als Variable auf. Um den optimalen Produktionsplan für jeden realisierbaren L_4 - Wert bestimmen zu können, müssen zunächst die gesamten variablen Kosten der verschiedenen Produktionsalternativen berechnet werden.

Die variablen Herstellungskosten der letzten beiden Perioden ergeben sich aus der Beziehung:

$$(422.10) \quad K_p(x_5,x_6) = K_p(x_5) + K_p(x_6)$$

Unter Berücksichtigung von (422.6) gilt dann für (422.10):

$$(422.11) \quad K_p(x_5,L_4) = K_p(x_5) + K_p(58 - L_4 - x_5)$$

Die entsprechenden Lagerhaltungskosten werden durch die Gleichung:

$$(422.12) \quad K_L(L_4,L_5,L_6) = 20 \cdot [0{,}5\,(L_4 + L_5) + 0{,}5\,(L_5 + L_6)]$$

determiniert. Da $L_6 = 0$ gilt und L_5 der Bedingung

$$(422.13) \quad L_5 = L_4 + x_5 - 50$$

genügt, geht (422.12) über in:

$$(422.14) \quad K_L(L_4,x_5) = 10 \cdot [3\,L_4 + 2\,x_5 - 100]$$

Die gesamten variablen Herstellungs- und Lagerhaltungskosten der letzten beiden Perioden ergeben sich dann aus der Gleichung:

$$(422.15) \quad Kv\,(L_4,x_5) = K_p\,(x_5) + K_p(58 - x_5 - L_4) + 10 \cdot [3\,L_4 - 2\,x_5 - 100]$$

Für jeden zulässigen L_4 - Wert wird diese Funktion mit allen möglichen x_5 - Werten berechnet. Die Ergebnisse werden in Tabelle 3[1] dargestellt. Anschließend wird das Kostenminimum für jeden Lagerbestand ausgewählt. Der zugehörige x_5 - Wert gibt die relativ optimale Produktionsmenge an. Die minimalen Werte der gesamten variablen Kosten von der betrachteten Periode bis zum Jahresende werden im folgenden mit F bezeichnet. Da sie im ersten Planungsschritt in Abhängigkeit von L_4 bestimmt werden, gilt unter Berücksichtigung der Gleichung (422.15):

$$(422.16) \quad F_5(L_4) = \min_{x_5} \Big[K_p(x_5) + K_p(58 - x_5 - L_4) + 10 \left[3 L_4 + 2 x_5 - 100 \right] \Big]$$

Der Index 5 gibt den Zeitabschnitt an, für den die Optimierung vorgenommen wird. Durch $\min_{x_5}$ wird das Kostenminimum in bezug auf die Werte für die Produktion x_5 während der 5. Periode zum Ausdruck gebracht. Aufgrund der oben eingesetzten Transformationsbeziehung (422.6) kann anschließend für jeden relativ optimalen x_5 - Wert die zugehörige kostengünstigste Produktionsmenge der 6. Periode bestimmt werden. Die entsprechenden Produktionspläne der letzten beiden Zeitabschnitte werden in Tabelle 4 dargestellt.

Im zweiten Planungsschritt werden die minimalen Kosten für die letzten 3 Perioden errechnet. Die gesamten variablen Kosten der vierten Periode setzen sich aus den Produktions- und Lagerhaltungskosten zusammen:

$$K_p(x_4) + 10 (L_3 + L_4)$$

Da die Transformationsbeziehung:

$$(422.17) \quad L_4 = L_3 + x_4 - 30$$

---

1) Die Tabellen 3 bis 12 wurden mit Änderungen der Arbeit von SHEPHARD entnommen; vgl. W. SHEPHARD, a.a.O., S. 18 ff.

Tabelle 3: Variable Produktions- und Lagerhaltungskosten während der 5. und 6. Periode (in 1.000 Dollar).

L4 \ X5	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
20	4 75																														
21	4 68	4 61																													
22	4 61	4 54	4 47																												
23	4 54	4 47	4 40	4 33																											
24	4 47	4 40	4 33	4 26	4 19																										
25	4 40	4 33	4 26	4 19	4 12	4 05																									
26	4 33	4 26	4 19	4 12	4 05	3 98	3 91																								
27	4 26	4 19	4 12	4 05	3 98	3 91	3 84	3 77																							
28	4 19	4 12	4 05	3 98	3 91	3 84	3 77	3 70	3 63																						
29		4 05	3 98	3 91	3 84	3 77	3 70	3 63	3 56	3 49																					
30			3 91	3 84	3 77	3 70	3 63	3 56	3 49	3 42	3 35																				
31				3 77	3 70	3 63	3 56	3 49	3 42	3 35	3 28	3 21																			
32					3 63	3 56	3 49	3 42	3 35	3 28	3 21	3 14	3 07																		
33						3 49	3 42	3 35	3 28	3 21	3 14	3 07	3 00	2 93																	
34							3 35	3 28	3 21	3 14	3 07	3 00	2 93	2 86	2 79																
35								3 21	3 14	3 07	3 00	2 93	2 86	2 79	2 72	2 65															
36									3 07	3 00	2 93	2 86	2 79	2 72	2 65	2 58	2 56													
37										2 93	2 86	2 79	2 72	2 65	2 58	2 51	2 49	2 47												
38											2 79	2 72	2 65	2 58	2 51	2 44	2 42	2 40	2 38											
39												2 65	2 58	2 51	2 44	2 37	2 35	2 33	2 31	2 29										
40													2 51	2 44	2 37	2 30	2 28	2 26	2 24	2 22	2 20									
41														2 37	2 30	2 23	2 21	2 19	2 17	2 15	2 13	2 11								
42															2 23	2 16	2 14	2 12	2 10	2 08	2 06	2 04	2 02							
43																2 09	2 07	2 05	2 03	2 01	1 99	1 97	1 95	1 93						
44																	2 00	1 98	1 96	1 94	1 92	1 90	1 88	1 86	1 84					
45																		1 91	1 89	1 87	1 85	1 83	1 81	1 79	1 77	1 75				
46																			1 82	1 80	1 78	1 76	1 74	1 72	1 70	1 68	1 66			
47																				1 73	1 71	1 69	1 67	1 65	1 63	1 61	1 59	1 57		
48																					1 64	1 62	1 60	1 58	1 56	1 54	1 52	1 50	1 48	
49																						1 55	1 53	1 51	1 49	1 47	1 45	1 43	1 41	1 39	
50																							1 46	1 44	1 42	1 40	1 38	1 36	1 34	1 32	1 30
51																								1 37	1 35	1 33	1 31	1 29	1 27	1 25	1 23
52																									1 28	1 26	1 24	1 22	1 20	1 18	1 16
53																										1 19	1 17	1 15	1 13	1 11	1 09
54																											1 10	1 08	1 06	1 04	1 02
55																												1 01	0 99	0 97	0 95
56																													0 92	0 90	0 88
57																														0 83	0 81
58																															0 74

Tabelle 4: Minimale variable Produktions- und Lagerhaltungskosten während der 5. und 6. Periode für die verschiedenen möglichen Werte des Lagers zu Beginn der 5. Periode (in 1.000 Dollar).

L_4	$F_5(L_4)$	Optima von	
		x_5	x_6
20	4.75	30	8
21	4.61	29	8
22	4.47	28	8
23	4.33	27	8
24	4.19	26	8
25	4.05	25	8
26	3.91	24	8
27	3.77	23	8
28	3.63	22	8
29	3.49	21	8
30	3.35	20	8
31	3.21	19	8
32	3.07	18	8
33	2.93	17	8
34	2.79	16	8
35	2.65	15	8
36	2.56	14	8
37	2.47	13	8
38	2.38	12	8
39	2.29	11	8
40	2.20	10	8
41	2.11	9	8
42	2.02	8	8
43	1.93	7	8
44	1.84	6	8
45	1.75	5	8
46	1.66	4	8
47	1.57	3	8
48	1.48	2	8
49	1.39	1	8
50	1.30	0	8
51	1.23	0	7
52	1.16	0	6
53	1.09	0	5
54	1.02	0	4
55	.95	0	3
56	.88	0	2
57	.81	0	1
58	.74	0	0

gilt, können die Lagerhaltungskosten auch durch

$$10\ (2\ L_3 + x_4 - 30)$$

angegeben werden.

Zu diesen Kosten müssen die bereits oben ermittelten Werte für die letzten beiden Perioden addiert werden. Die Bestimmung der relativen Optima setzt voraus, daß für jeden auftretenden Lagerbestand am Ende der vierten Periode nur das entsprechende Kostenminimum eingesetzt wird. Dadurch ergeben sich die gesamten variablen Kosten von der betrachteten Periode bis zum Jahresende unter der Bedingung, daß in den nachfolgenden Zeitabschnitten 5 und 6 optimal entschieden wird. Es gilt die Beziehung:

$$(422.18)\quad Kv\ (L_3, L_4, x_4) = K_p\ (x_4) + 10 \cdot [2\ L_3 + x_4 - 30] + F_5\ (L_4)$$

Aufgrund von (422.17) geht diese Gleichung über in:

$$(422.19)\quad Kv\ (L_3, x_4) = K_p\ (x_4) + 10 \cdot [2\ L_3 + x_4 - 30] + F_5\ (L_3 + x_4 - 30)$$

Damit treten auch in diesem Planungsschritt zwei Variable (L_3 und x_4) auf, für die zunächst sämtliche Funktionswerte innerhalb der zulässigen Bereiche errechnet werden müssen. Die Randwerte für L_3 ergeben sich aus der nachgefragten Menge und den Kapazitätsbeschränkungen. Da für die Perioden 4 und 5 ein Bedarf von 80 ME angegeben wird und die Produktionskapazität für beide Zeitabschnitte nur 60 ME beträgt, muß am Ende der dritten Periode ein Mindestlager von 20 ME vorhanden sein. Der maximale Wert für L_3 wird in dem vorliegenden Beispiel durch die Differenz

zwischen der Produktionskapazität und der Nachfrage in den ersten drei Perioden (90 ME - 20 ME = 70 ME) bestimmt.

Dementsprechend gilt für L_3:

(422.20) $$20 \leq L_3 \leq 70$$

Aus (422.4) und (422.17) folgt für x_4:

(422.21) $$20 \leq L_3 + x_4 - 30 \leq 58$$

oder

(422.22) $$50 - L_3 \leq x_4 \leq 88 - L_3$$

Wegen der Nichtnegativitätsbedingung einerseits und der Kapazitätsbeschränkung andererseits ergibt sich für x_4 auch die Beziehung:

(422.23) $$0 \leq x_4 \leq 30$$

Durch (422.22) und (422.23) werden alle zulässigen Bereiche von x_4 für jeden realisierbaren L_3 - Wert bestimmt. Analog zu den Ausführungen im ersten Planungsschritt kann hierfür der Ausdruck:

(422.24) $$\text{Max } (^{0}_{50 - L_3}) \leq x_4 \leq \text{Min } (^{30}_{88 - L_3})$$

geschrieben werden.

Die Werte, die sich aufgrund der Funktion (422.19) für die verschiedenen Produktionsalternativen ergeben, werden in Tabelle 5 dargestellt. Aus diesen Ergebnissen lassen sich die relativen Optima wiederum durch einen reinen Wertevergleich bestimmen, indem für jeden möglichen Lagerbestand am Ende der dritten Periode das Kostenminimum ausgewählt wird. Allgemein gilt für diese Werte die Beziehung:

Tabelle 5: Variable Produktions- und Lagerhaltungskosten für die Perioden 4 bis 6 (in 1.000 Dollar).

L_3 \ x_4	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
20	8 90																														
21	8 78	8 76																													
22	8 66	8 64	8 62																												
23	8 54	8 52	8 50	8 48																											
24	8 42	8 40	8 38	8 36	8 34																										
25	8 30	8 28	8 26	8 24	8 22	8 20																									
26	8 18	8 16	8 14	8 12	8 10	8 08	8 06																								
27	8 06	8 04	8 02	8 00	7 98	7 96	7 94	7 92																							
28	7 94	7 92	7 90	7 88	7 86	7 84	7 82	7 80	7 78																						
29	7 82	7 80	7 78	7 76	7 74	7 72	7 70	7 68	7 66	7 64																					
30	7 70	7 68	7 66	7 64	7 62	7 60	7 58	7 56	7 54	7 52	7 50																				
31	7 58	7 56	7 54	7 52	7 50	7 48	7 46	7 44	7 42	7 40	7 38	7 36																			
32	7 46	7 44	7 42	7 40	7 38	7 36	7 34	7 32	7 30	7 28	7 26	7 24	7 22																		
33	7 34	7 32	7 30	7 28	7 26	7 24	7 22	7 20	7 18	7 16	7 14	7 12	7 10	7 08																	
34	7 22	7 20	7 18	7 16	7 14	7 12	7 10	7 08	7 06	7 04	7 02	7 00	6 98	6 96	6 94																
35	7 10	7 08	7 06	7 04	7 02	7 00	6 98	6 96	6 94	6 92	6 90	6 88	6 86	6 84	6 82	6 80															
36	7 03	6 96	6 94	6 92	6 90	6 88	6 86	6 84	6 82	6 80	6 78	6 76	6 74	6 72	6 70	6 68	6 71														
37	6 96	6 89	6 82	6 80	6 78	6 76	6 74	6 72	6 70	6 68	6 66	6 64	6 62	6 60	6 58	6 56	6 59	6 62													
38	6 89	6 82	6 75	6 68	6 66	6 64	6 62	6 60	6 58	6 56	6 54	6 52	6 50	6 48	6 46	6 44	6 47	6 50	6 53												
39	6 82	6 75	6 68	6 61	6 54	6 52	6 50	6 48	6 46	6 44	6 42	6 40	6 38	6 36	6 34	6 32	6 35	6 38	6 41	6 44											
40	6 75	6 68	6 61	6 54	6 47	6 40	6 38	6 36	6 34	6 32	6 30	6 28	6 26	6 24	6 22	6 20	6 23	6 26	6 29	6 32	6 35										
41	6 68	6 61	6 54	6 47	6 40	6 33	6 26	6 24	6 22	6 20	6 18	6 16	6 14	6 12	6 10	6 08	6 11	6 14	6 17	6 20	6 23	6 26									
42	6 61	6 54	6 47	6 40	6 33	6 26	6 19	6 12	6 10	6 08	6 06	6 04	6 02	6 00	5 98	5 96	5 99	6 02	6 05	6 08	6 11	6 14	6 17								
43	6 54	6 47	6 40	6 33	6 26	6 19	6 12	6 05	5 98	5 96	5 94	5 92	5 90	5 88	5 86	5 84	5 87	5 90	5 93	5 96	5 99	6 02	6 05	6 08							
44	6 47	6 40	6 33	6 26	6 19	6 12	6 05	5 98	5 91	5 84	5 82	5 80	5 78	5 76	5 74	5 72	5 75	5 78	5 81	5 84	5 87	5 90	5 93	5 96	5 99						
45	6 40	6 33	6 26	6 19	6 12	6 05	5 98	5 91	5 84	5 77	5 70	5 68	5 66	5 64	5 62	5 60	5 63	5 66	5 69	5 72	5 75	5 78	5 81	5 84	5 87	5 90					
46	6 33	6 26	6 19	6 12	6 05	5 98	5 91	5 84	5 77	5 70	5 63	5 56	5 54	5 52	5 50	5 48	5 51	5 54	5 57	5 60	5 63	5 66	5 69	5 72	5 75	5 78	5 81				
47	6 26	6 19	6 12	6 05	5 98	5 91	5 84	5 77	5 70	5 63	5 56	5 49	5 42	5 40	5 38	5 36	5 39	5 42	5 45	5 48	5 51	5 54	5 57	5 60	5 63	5 66	5 69	5 72			
48	6 19	6 12	6 05	5 98	5 91	5 84	5 77	5 70	5 63	5 56	5 49	5 42	5 35	5 28	5 26	5 24	5 27	5 30	5 33	5 36	5 39	5 42	5 45	5 48	5 51	5 54	5 57	5 60	5 63		
49	6 12	6 05	5 98	5 91	5 84	5 77	5 70	5 63	5 56	5 49	5 42	5 35	5 28	5 21	5 14	5 12	5 15	5 18	5 21	5 24	5 27	5 30	5 33	5 36	5 39	5 42	5 45	5 48	5 51	5 54	
50	6 05	5 98	5 91	5 84	5 77	5 70	5 63	5 56	5 49	5 42	5 35	5 28	5 21	5 14	5 07	5 00	4 93	4 91	4 94	4 97	5 00	5 03	5 06	5 09	5 12	5 15	5 18	5 21	5 24	5 27	5 30
51	6 00	5 91	5 84	5 77	5 70	5 63	5 56	5 49	5 42	5 35	5 28	5 21	5 14	5 07	5 00	4 93	4 91	4 94	4 97	5 00	5 03	5 06	5 09	5 12	5 15	5 18	5 21	5 24	5 27	5 30	5 33
52	5 95	5 86	5 77	5 70	5 63	5 56	5 49	5 42	5 35	5 28	5 21	5 14	5 07	5 00	4 93	4 86	4 86	4 82	4 85	4 88	4 91	4 94	4 97	5 00	5 03	5 06	5 09	5 12	5 15	5 18	5 21
53	5 90	5 81	5 72	5 63	5 56	5 49	5 42	5 35	5 28	5 21	5 14	5 07	5 00	4 93	4 86	4 79	4 77	4 75	4 73	4 76	4 79	4 82	4 85	4 88	4 91	4 94	4 97	5 00	5 03	5 06	5 09
54	5 85	5 76	5 67	5 58	5 49	5 42	5 35	5 28	5 21	5 14	5 07	5 00	4 93	4 86	4 79	4 72	4 70	4 68	4 66	4 64	4 67	4 70	4 73	4 76	4 79	4 82	4 85	4 88	4 91	4 94	4 97
55	5 80	5 71	5 62	5 53	5 44	5 35	5 28	5 21	5 14	5 07	5 00	4 93	4 86	4 79	4 72	4 65	4 63	4 61	4 59	4 57	4 55	4 58	4 61	4 64	4 67	4 70	4 73	4 76	4 79	4 82	4 85
56	5 75	5 66	5 57	5 48	5 39	5 30	5 21	5 14	5 07	5 00	4 93	4 86	4 79	4 72	4 65	4 58	4 56	4 54	4 52	4 50	4 48	4 46	4 49	4 52	4 55	4 58	4 61	4 64	4 67	4 70	4 73
57	5 70	5 61	5 52	5 43	5 34	5 25	5 18	5 07	5 00	4 93	4 86	4 79	4 72	4 65	4 58	4 51	4 49	4 47	4 45	4 43	4 41	4 39	4 37	4 40	4 43	4 46	4 49	4 52	4 55	4 58	4 61
58	5 65	5 56	5 47	5 38	5 29	5 20	5 11	5 02	4 93	4 86	4 79	4 72	4 65	4 58	4 51	4 44	4 42	4 40	4 38	4 36	4 34	4 32	4 30	4 28	4 31	4 34	4 37	4 40	4 43	4 46	4 49
59		5 51	5 42	5 33	5 24	5 15	5 06	4 97	4 88	4 79	4 72	4 65	4 58	4 51	4 44	4 37	4 35	4 33	4 31	4 29	4 27	4 25	4 23	4 21	4 19	4 22	4 25	4 28	4 31	4 34	4 37
60			5 37	5 28	5 19	5 10	5 01	4 92	4 83	4 74	4 65	4 58	4 51	4 44	4 37	4 30	4 28	4 26	4 24	4 22	4 20	4 18	4 16	4 14	4 12	4 10	4 13	4 16	4 19	4 22	4 25
61				5 23	5 14	5 05	4 96	4 87	4 78	4 69	4 60	4 51	4 44	4 37	4 30	4 23	4 21	4 19	4 17	4 15	4 13	4 11	4 09	4 07	4 05	4 03	4 01	4 04	4 07	4 10	4 13
62					5 09	5 00	4 91	4 82	4 73	4 64	4 55	4 46	4 37	4 30	4 23	4 16	4 14	4 12	4 10	4 08	4 06	4 04	4 02	4 00	3 98	3 96	3 94	3 92	3 95	3 98	4 01
63						4 95	4 86	4 77	4 68	4 59	4 50	4 41	4 32	4 23	4 16	4 09	4 07	4 05	4 03	4 01	3 99	3 97	3 95	3 93	3 91	3 89	3 87	3 85	3 83	3 86	3 89
64							4 81	4 72	4 63	4 54	4 45	4 36	4 27	4 18	4 09	4 02	4 00	3 98	3 96	3 94	3 92	3 90	3 88	3 86	3 84	3 82	3 80	3 78	3 76	3 74	3 77
65								4 67	4 58	4 49	4 40	4 31	4 22	4 13	4 04	3 95	3 93	3 91	3 89	3 87	3 85	3 83	3 81	3 79	3 77	3 75	3 73	3 71	3 69	3 67	3 65
66									4 53	4 44	4 35	4 26	4 17	4 08	3 99	3 90	3 86	3 84	3 82	3 80	3 78	3 76	3 74	3 72	3 70	3 68	3 66	3 64	3 62	3 60	3 58
67										4 39	4 30	4 21	4 12	4 03	3 94	3 85	3 81	3 77	3 75	3 73	3 71	3 69	3 67	3 65	3 63	3 61	3 59	3 57	3 55	3 53	3 51
68											4 25	4 16	4 07	3 98	3 89	3 80	3 76	3 72	3 68	3 66	3 64	3 62	3 60	3 58	3 56	3 54	3 52	3 50	3 48	3 46	3 44
69												4 11	4 02	3 93	3 84	3 75	3 71	3 67	3 63	3 59	3 57	3 55	3 53	3 51	3 49	3 47	3 45	3 43	3 41	3 39	3 37
70													3 97	3 88	3 79	3 70	3 66	3 62	3 58	3 54	3 50	3 48	3 46	3 44	3 42	3 40	3 38	3 36	3 34	3 32	3 30

$$(422.25)\quad F_4(L_3) = \min_{x_4} \left[K_p(x_4) + 10 \cdot [2\,L_3 + x_4 - 30] + F_5\,(L_3 + x_4 - 30) \right]$$

In Tabelle 6 werden die minimalen Kosten und die entsprechenden optimalen Produktionsmengen in Abhängigkeit von L_3 wiedergegeben.

Im folgenden Planungsschritt werden die relativen Optima für die 3. Periode unter Berücksichtigung der aus dem vorhergehenden Schritt resultierenden Kostenminima bestimmt. Die gesamten variablen Kosten dieser Periode lassen sich aufgrund der Transformationsbeziehung:

$$(422.26)\quad L_3 = L_2 + x_3 - 10$$

durch $\quad K_p(x_3) + 10 \cdot [2\,L_2 + x_3 - 10]$

angeben. Zu diesen Werten müssen die minimalen Kosten der nachfolgenden Zeitabschnitte addiert werden, so daß in dieser Stufe die Kostenfunktion

$$(422.27)\quad Kv(L_2,L_3,x_3) = K_p(x_3) + 10 \cdot [2\,L_2 + x_3 - 10] + F_4(L_3)$$

oder wegen (422.26)

$$(422.28)\quad Kv(L_2,x_3) = K_p(x_3) + 10 \cdot [2\,L_2 + x_3 - 10] + F_4(L_2 + x_3 - 10)$$

gilt. Bevor die Optimierung vorgenommen werden kann, müssen wiederum die Grenzen für L_2 und x_3 festgelegt werden. Der Lagerbestand am Ende der 2. Periode erhält den minimalen Wert 0, da die Produktionskapazität der nachfolgenden Perioden ausreicht, um den Bedarf für diesen Zeitraum zu decken. Aufgrund der Nachfragesituation in den ersten beiden Zeitabschnitten (5 ME +

Tabelle 6: Minimale variable Produktions- und Lagerhaltungskosten während der 4., 5. und 6. Periode für die verschiedenen möglichen Werte des Lagers zu Beginn der 4. Periode (in 1.000 Dollar).

I_3	$F_4(I_3)$	Optima von x_4
20	8.90	30
21	8.76	29
22	8.62	28
23	8.48	27
24	8.34	26
25	8.20	25
26	8.06	24
27	7.92	23
28	7.78	22
29	7.64	21
30	7.50	20
31	7.36	19
32	7.22	18
33	7.08	17
34	6.94	16
35	6.80	15
36	6.68	15
37	6.56	15
38	6.44	15
39	6.32	15
40	6.20	15
41	6.08	15
42	5.96	15
43	5.84	15
44	5.72	15
45	5.60	15
46	5.48	15
47	5.36	15
48	5.24	15
49	5.12	15
50	5.00	15
51	4.91	14
52	4.82	13
53	4.73	12
54	4.64	11
55	4.55	10
56	4.46	9
57	4.37	8
58	4.28	7
59	4.19	6
60	4.10	5
61	4.01	4
62	3.92	3
63	3.83	2
64	3.74	1
65	3.65	0
66	3.58	0
67	3.51	0
68	3.44	0
69	3.37	0
70	3.30	0

5 ME = 10 ME) und der Kapazitätsbeschränkung (30 ME + 30 ME = 60 ME) ergibt sich ein maximaler Wert für L_2 von 50 ME. Dementsprechend gilt die Beziehung:

(422.29) $$0 \leq L_2 \leq 50$$

Aus (422.20) und (422.26) folgt für x_3:

(422.30) $$20 \leq L_2 + x_3 - 10 \leq 70$$

oder

(422.31) $$30 - L_2 \leq x_3 \leq 80 - L_2$$

Die Nichtnegativitätsbedingung und Kapazitätsbeschränkung für x_3 wird durch

(422.32) $$0 \leq x_3 \leq 30$$

eingehalten. Damit ergeben sich die verschiedenen Produktionsalternativen für alle zulässigen Werte von L_2 aus der Beziehung:

(422.33) $$\text{Max} \left(\begin{matrix}0\\30-L_2\end{matrix}\right) \leq x_3 \leq \text{Min} \left(\begin{matrix}30\\80-L_2\end{matrix}\right)$$

Innerhalb dieser Grenzen muß nun für jedes mögliche Wertepaar von L_2 und x_3 die Funktion (422.28) berechnet werden. Die entsprechenden Kosten werden in Tabelle 7 dargestellt. Wie bereits in den ersten beiden Planungsschritten gezeigt wurde, lassen sich aus diesen Ergebnissen die relativen Optima dadurch bestimmen, daß für jeden möglichen Lagerbestand am Ende der zweiten Periode das Kostenminimum ausgewählt wird. Allgemein gilt für diese Werte die Beziehung:

(422.34) $$F_3(L_2) = \underset{x_3}{\text{Min}} \left[K_p(x_3) + 10 \cdot \left[2\, L_2 + x_3 - 10\right] + F_4(L_2 + x_3 - 10) \right]$$

In Tabelle 8 werden die Kostenminima und die entsprechenden Produktionsmengen in Abhängigkeit von L_2 angegeben.

Im 4. Iterationsabschnitt müssen die optimalen Programme für die 2. Periode aufgestellt werden. Die Berechnung erfolgt in gleicher Weise wie in den vorhergehenden Planungsschritten. Zunächst wird die Kostenfunktion für den gesamten Zeitraum von der 2. Periode

Tabelle 7: Variable Produktions- und Lagerhaltungskosten für die Perioden 3 bis 6 (in 1.000 Dollar).

L_2 \ x_3	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	12 85														10 89																
1	12 73	12 71													10 77	10 75															
2	12 61		12 57												10 65	10 63	10 86														
3	12 49			12 43											10 53	10 51	10 54	10 57													
4	12 37				12 29										10 41	10 38	10 42		10 48												
5	12 25					12 15									10 29	10 27	10 30			10 38											
6	12 13						12 01								10 17	10 15	10 18				10 30										
7	12 01							11 87							10 05	10 03	10 06					10 21									
8	11 89								11 73						9 93	9 91	9 94						10 12								
9	11 77									11 59					9 81	9 79	9 82							10 03							
10	11 65										11 45				9 69	9 67	9 70								9 94						
11	11 53											11 31			9 57	9 55	9 58									9 85					
12	11 41												11 17		9 45	9 43	9 46										9 76				
13	11 29													11 03	9 33	9 31	9 34											9 67			
14	11 17														9 21	9 19	9 22												9 58		
15	11 05														9 09	9 07	9 10													9 49	
16	10 95														8 99	8 95	8 98														9 40
17	10 85														8 89	8 85	8 88														9 28
18	10 75														8 79	8 75	8 78	8 77													9 16
19	10 65														8 69	8 65	8 68		8 68												9 04
20	10 55														8 59	8 55	8 58			8 59											8 92
21	10 45														8 49	8 45	8 48				8 50										8 80
22	10 35														8 39	8 35	8 38					8 41									8 68
23	10 25														8 29	8 25	8 28						8 32								8 56
24	10 15														8 19	8 15	8 18							8 23							8 44
25	10 05														8 09	8 05	8 08								8 14						8 32
26	9 95														7 99	7 95	7 98									8 05					8 20
27	9 85														7 89	7 85	7 88										7 96				8 08
28	9 75														7 79	7 75	7 78											7 87			7 96
29	9 65														7 69	7 65	7 68												7 78		7 84
30	9 55														7 59	7 55	7 58													7 69	7 72
31	9 48														7 52	7 45	7 48														7 60
32	9 41														7 45	7 38	7 36	7 37													7 50
33	9 34														7 38	7 31	7 29	7 27	7 28												7 40
34	9 27																	7 20	7 18	7 19											7 30
35	9 20																		7 11	7 09	7 10										7 20
36	8 99																			7 02	7 00	7 01									7 10
37	9 06																														
38	8 99																														
39	8 92																														
40	8 85																														
41	8 78																														
42	8 71																														
43	8 64																														
44	8 57																														
45	8 50																														
46	8 45																														
47	8 40																														
48	8 35																														
49	8 30																														
50	8 25																														

Tabelle 8: Minimale variable Produktions- und Lagerhaltungskosten während der 3., 4., 5. und 6. Periode für die verschiedenen möglichen Werte des Lagers zu Beginn der 3. Periode (in 1.000 Dollar).

I_2	$F_3(I_2)$	Optima von x_3
0	12.85	30
1	12.71	29
2	12.57	28
3	12.43	27
4	12.29	26
5	12.15	25
6	12.01	24
7	11.87	23
8	11.73	22
9	11.59	21
10	11.45	20
11	11.31	19
12	11.17	18
13	11.03	17
14	10.89	16
15	10.75	15
16	10.63	15
17	10.51	15
18	10.39	15
19	10.27	15
20	10.15	15
21	10.03	15
22	9.91	15
23	9.79	15
24	9.67	15
25	9.55	15
26	9.43	15
27	9.31	15
28	9.19	15
29	9.07	15
30	8.95	15
31	8.85	15
32	8.75	15
33	8.65	15
34	8.55	15
35	8.45	15
36	8.35	15
37	8.25	15
38	8.15	15
39	8.07	15
40	7.95	15
41	7.85	15
42	7.75	15
43	7.65	15
44	7.55	15
45	7.45	15
46	7.36	14
47	7.27	13
48	7.18	12
49	7.09	11
50	7.00	10

bis zum Jahresende unter der Bedingung bestimmt, daß in den nachfolgenden Zeitabschnitten 3 bis 6 optimal entschieden wird. Aufgrund der Transformationsbeziehung

$$(422.35) \quad L_2 = L_1 + x_2 - 5$$

ergeben sich die Kosten durch:

$$(422.36) \quad Kv(L_1, x_2) = K_p(x_2) + 10 \cdot [2\, L_1 + x_2 - 5] + F_3(L_1 + x_2 - 5)$$

Für die Variablen L_1 und x_2 müssen wieder die Grenzen festgelegt werden. Der minimale Wert von L_1 ist 0, da die Produktionskapazität in den darauffolgenden Perioden ausreicht, um den entsprechenden Bedarf zu decken. Aus der Kapazitätsbeschränkung und der Nachfrage in der ersten Periode folgt das Maximum für L_1 von 30 ME - 5 ME = 25 ME. Dementsprechend gilt die Beziehung:

$$(422.37) \quad 0 \leq L_1 \leq 25$$

Die Randwerte von x_2 werden einerseits durch (422.29) und (422.35) bestimmt:

$$(422.38) \quad 0 \leq L_1 + x_2 - 5 \leq 50$$

bzw.

$$(422.39) \quad 5 - L_1 \leq x_2 \leq 55 - L_1$$

und andererseits durch die Nichtnegativitätsbedingung und Kapazitätsbeschränkung:

$$(422.40) \quad 0 \leq x_2 \leq 30$$

Damit ergeben sich die zulässigen Bereiche von x_2 für jeden möglichen Wert von L_1 durch:

$$(422.41) \quad \text{Max} \left(\begin{matrix} 0 \\ 5-L_1 \end{matrix}\right) \leq x_2 \leq \text{Min} \left(\begin{matrix} 30 \\ 55-L_1 \end{matrix}\right)$$

Die entsprechenden Kosten, die sich mit Hilfe der Funk-

Tabelle 9: Variable Produktions- und Lagerhaltungskosten für die Perioden 2 bis 6 (in 1.000 Dollar).

L_1 \ x_2	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	13 55	13 51	13 47	13 43	13 39	13 35	13 31	13 27	13 23	13 19	13 15	13 13	13 11	13 09	13 07	13 05	13 08	13 11	13 14	13 17	13 20	13 23	13 26	13 29	13 32	13 35					
1	13 45	13 41	13 37	13 33							13 05	13 01	12 99		12 95	12 93	12 96	12 99	13 02	13 05	13 08	13 11				13 23	13 26				
2	13 35	13 31	13 27	13 23							12 95	12 91	12 87		12 83	12 81	12 84	12 87	12 90	12 93	12 96	12 99				13 11	13 14	13 17			
3	13 25	13 21	13 17	13 13							12 85	12 81	12 77		12 71	12 69	12 72	12 75	12 78	12 81	12 84	12 87				12 99	13 02		13 08		
4	13 15	13 11	13 07	13 03							12 75	12 71	12 67		12 59	12 57	12 60	12 63	12 66	12 69	12 72	12 75				12 87	12 90			12 99	
5	13 05	13 01	12 97	12 93							12 65	12 61	12 57		12 49	12 45	12 48	12 51	12 54	12 57	12 60	12 63				12 75	12 78				12 80
6	12 97	12 91	12 87	12 83							12 55	12 51	12 47		12 39	12 35	12 38	12 39	12 42	12 45	12 48	12 51				12 63	12 66				12 78
7	12 89	12 83	12 77	12 73							12 45	12 41	12 37		12 29	12 25	12 28	12 27	12 30	12 33	12 36	12 39				12 51	12 54				12 66
8	12 81	12 75	12 69	12 63							12 35	12 31	12 27		12 19	12 15	12 16	12 17	12 18	12 21	12 24	12 27				12 39	12 42				12 54
9	12 73	12 67	12 61	12 55							12 25	12 21	12 17		12 09	12 05	12 06	12 07	12 08	12 09	12 12	12 15				12 27	12 30				12 42
10	12 65	12 59	12 53	12 47							12 15	12 11	12 07		11 99	11 95	11 96	11 97	11 98	11 98	12 00	12 03				12 15	12 18				12 30
11	12 57	12 51	12 45	12 39							12 05	12 01	11 97		11 89	11 85	11 86	11 87	11 88	11 89	11 90	11 91				12 03	12 06				12 18
12	12 49	12 43	12 37	12 31							11 95	11 91	11 87		11 79	11 75	11 76	11 77	11 78	11 79	11 80	11 81				11 91	11 94				12 06
13	12 41	12 35	12 29	12 23							11 85	11 81	11 77		11 69	11 65	11 66	11 67	11 68	11 69	11 70	11 71				11 79	11 82				11 94
14	12 33	12 27	12 21	12 15							11 75	11 71	11 67		11 59	11 55	11 56	11 57	11 58	11 59	11 60	11 61				11 67	11 70				11 82
15	12 25	12 19	12 13	12 07							11 65	11 61	11 57		11 49	11 45	11 46	11 47	11 48	11 49	11 50	11 51				11 55	11 58				11 70
16	12 17	12 11	12 05	11 99							11 57	11 51	11 47		11 39	11 35	11 36	11 37	11 38	11 39	11 40	11 41				11 45	11 46				11 58
17	12 09	12 03	11 97	11 91							11 49	11 43	11 37		11 29	11 25	11 26	11 27	11 28	11 29	11 30	11 31				11 35	11 36				11 46
18	12 01	11 95	11 89	11 83							11 41	11 35	11 29		11 19	11 15	11 16	11 17	11 18	11 19	11 20	11 21				11 25	11 26				11 34
19	11 93	11 87	11 81	11 75							11 33	11 27	11 21		11 09	11 05	11 06	11 07	11 08	11 09	11 10	11 11				11 15	11 16				11 22
20	11 85	11 79	11 73	11 67							11 25	11 19	11 13		11 01	10 95	10 96	10 97	10 98	10 99	11 00	11 01				11 05	11 06				11 10
21	11 78	11 71	11 65	11 59							11 17	11 11	11 05		10 93	10 87	10 86	10 87	10 88	10 89	10 90	10 91				10 95	10 96				11 00
22	11 71	11 64	11 57	11 51							11 09	11 03	10 97		10 85	10 79	10 78	10 77	10 78	10 79	10 80	10 81				10 85	10 86				10 90
23	11 64	11 57	11 50	11 43							11 01	10 95	10 89		10 77	10 71	10 70	10 69	10 68	10 69	10 70	10 71				10 75	10 76				10 80
24	11 57	11 50	11 43	11 36							10 93	10 87	10 81		10 69	10 63	10 62	10 61	10 60	10 59	10 60	10 61				10 65	10 66				10 70
25	11 50	11 43	11 36	11 29							10 85	10 79	10 73		10 61	10 55	10 54	10 53	10 52	10 49	10 50	10 51				10 55	10 56				10 60

tion (422.36) für die verschiedenen Produktionsalternativen errechnen lassen, werden in Tabelle 9 dargestellt. Von diesen Ergebnissen müssen dann wieder die minimalen Werte für jeden Lagerbestand am Ende der ersten Periode ermittelt werden. Die relevanten Kostenminima ergeben sich aus der Beziehung:

$$(422.42)\quad F_2(L_1) = \min_{x_2} \left[K_p(x_2) + 10 \cdot \left[2\,L_1 + x_2 - 5 \right] + F_3(L_1 + x_2 - 5) \right]$$

In Tabelle 10 werden die Werte für F_2 und die zugehörigen - relativ optimalen - Produktionsmengen in Abhängigkeit von L_1 wiedergegeben.

Tabelle 10: Minimale variable Produktions- und Lagerhaltungskosten während der 2., 3., 4., 5. und 6. Periode für die verschiedenen möglichen Werte des Lagerbestandes zu Beginn der 2. Periode (in 1.000 Dollar).

L_1	$F_2(L_1)$	Optimavon x_2
0	13.05	15
1	12.93	15
2	12.81	15
3	12.69	15
4	12.57	15
5	12.45	15
6	12.35	15
7	12.25	15
8	12.15	15
9	12.05	15
10	11.95	15
11	11.85	15
12	11.75	15
13	11.65	15
14	11.55	15
15	11.45	15
16	11.35	15
17	11.25	15
18	11.15	15
19	11.05	15
20	10.95	15
21	10.86	14
22	10.77	13
23	10.68	12
24	10.59	11
25	10.50	10

Mit diesen Ergebnissen kann im 5. Planungsschritt auch die optimale Politik für die erste Periode bestimmt werden. Unter Berücksichtigung der Transformationsbeziehung

$$(422.43) \qquad L_1 = L_0 + x_1 - 5$$

lautet die Kostenfunktion für den gesamten Planungszeitraum

$$(422.44) \quad Kv(L_0,x_1) = K_p(x_1) + 10\,[2\,L_0 + x_1 - 5] + F_2(L_0 + x_1 - 5),$$

wobei durch $F_2(L_0 + x_1 - 5)$ wiederum vorausgesetzt wird, daß in den Zeitabschnitten 2 bis 6 optimal entschieden wird. Da in dem vorliegenden Beispiel die Bedingung $L_0 = 0$ gilt, müssen in diesem Iterationsschritt nur die Grenzen von x_1 berechnet werden.

Aus (422.37) und (422.43) folgt:

$$(422.45) \qquad 0 \leq L_0 + x_1 - 5 \leq 25$$

bzw.

$$(422.46) \qquad 5 - L_0 \leq x_1 \leq 30 - L_0$$

Aufgrund der Kapazitätsbeschränkung und der Nichtnegativitätsbedingung gilt aber auch

$$(422.47) \qquad 0 \leq x_1 \leq 30,$$

so daß der gesamte zulässige Bereich für x_1 durch die Beziehung

$$(422.48) \qquad \text{Max}\,(5 \overset{0}{-} L_0) \leq x_1 \leq \text{Min}\,(30 \overset{30}{-} L_0)$$

angegeben werden kann. Da L_0 den Wert 0 erhält, ergibt

sich aus (422.48):

(422.49) $\quad 5 \leq x_1 \leq 30$

Innerhalb dieser Grenzen muß die Funktion (422.44) für alle Wertepaare von L_o (= 0) und x_1 berechnet werden. Die anfallenden Kosten sowie die zugehörigen Produktionsmengen werden in Tabelle 11 dargestellt. Entsprechend der Zielbedingung muß von diesen Werten wieder das Minimum ausgewählt werden, das durch die allgemeine Beziehung

$$(422.50) \quad F_1(L_o) = \min_{x_1} \left[K_p(x_1) + 10 \left[2 L_o + x_1 - 5 \right] + F_2(L_o + x_1 - 5) \right]$$

bestimmt werden kann. Dieses Kostenminimum ergibt sich bei $x_1 = 10$ mit 13.500 Dollar. Das Ergebnis besagt, daß bei einer optimalen Politik die Produktions- und Lagerhaltungskosten für alle 6 Perioden 13.500 Dollar betragen.

Tabelle 11: Variable Produktions- und Lagerhaltungskosten für alle 6 Perioden (in 1.000 Dollar).

L_o / x_1	$F_1(L_o)$
30	14.50
29	14.43
28	14.36
27	14.29
26	14.22
25	14.15
24	14.09
23	14.03
22	13.97
21	13.91
20	13.85
19	13.79
18	13.73
17	13.67
16	13.61
15	13.55
14	13.54
13	13.53
12	13.52
11	13.51
10	13.50
9	13.51
8	13.52
7	13.53
6	13.54
5	13.55

Von diesem gesamtoptimalen Wert ausgehend kann nun in entgegengesetzter Richtung zum Optimierungsverfahren für jeden Zeitabschnitt das entsprechende kostenminimale Produktionsprogramm aufgestellt werden. Aus $F_1(L_o = 0)$ folgt, daß in der ersten Periode 10 ME hergestellt werden müssen. Für diesen Wert von x_1 kann dann mit Hilfe der Transformationsbeziehung (422.43) der Lagerbestand am Ende des 1. Zeitabschnitts angegeben werden:

$$L_1 = 0 + 10 - 5 = 5$$

Anschließend wird für $L_1 = 5$ das Kostenminimum und die zugehörige optimale Produktionsmenge der 2. Periode in Tabelle 10 aufgesucht. x_2 erhält dabei den Wert 15. Unter Berücksichtigung der Ergebnisse für L_1 und x_2 folgt dann aus der Transformationsbeziehung (422.35) der Lagerbestand am Ende des 2. Zeitabschnittes:

$$L_2 = 5 + 15 - 5 = 15$$

Für $L_2 = 15$ ergibt sich aus der Tabelle 8 wiederum die optimale Produktionsmenge der 3. Periode ($x_3 = 15$).

Wird dieses Verfahren bis zum Planungsende fortgesetzt, so erhalten wir für die kostenminimale Gesamtlösung die in Tabelle 12 dargestellten Werte:

Tabelle 12: Optimaler Produktionsplan für den gesamten Planungszeitraum.

Periode	Lagerbestand	Produktionsmenge	nachgefragte Menge
0	0	0	0
1	5	10	5
2	15	15	5
3	20	15	10
4	20	30	30
5	0	30	50
6	0	8	8

Mit diesen Ausführungen wird deutlich, daß der von Shephard aufgestellte Algorithmus verhältnismäßig umfangreiche Rechenarbeiten erfordert. Bei größeren Modellen läßt sich die Lösung nur noch mit Hilfe von Elektronenrechnern bestimmen. Die Leistungsfähigkeit dieses Optimierungsverfahrens liegt vor allem darin, daß eine Vielzahl realistischer Voraussetzungen berücksichtigt werden kann. Neben den oben genannten Prämissen können z.B. auch Rüstkosten und Kapazitätsbeschränkungen für die Lagerhaltung eingeplant werden. Darüber hinaus kann die Kostenfunktion beliebige Verläufe annehmen und auch im Zeitablauf Änderungen unterworfen sein. Ebenso könnten unterschiedliche Lagerhaltungskosten für die einzelnen Zeitabschnitte gelten. Außerdem läßt sich dieses Verfahren für jede denkbare Absatzentwicklung einsetzen. Die Länge und Zahl der Perioden sowie die Annahmen für den Anfangs- und Endlagerbestand können den tatsächlichen Verhältnissen angepaßt werden. Schließlich besteht auch die Möglichkeit, das Kostenminimum für zwei oder mehr Produkte simultan zu bestimmen.[1] Allerdings steigt dadurch auch die Zahl der Produktionsalternativen sehr rasch an, so daß die Ermittlung der optimalen Programme erheblich komplizierter wird.

Die genannten Planungsprobleme lassen sich auch mit einem anderen Algorithmus lösen, der unter bestimmten Voraussetzungen bedeutend geringere Rechenarbeiten erfordert. Im nächsten Abschnitt soll das Prinzip dieser Optimierungsmethode an dem von Shephard aufgestellten Modell verdeutlicht werden.

---

1) Vgl. W.SHEPHARD, a.a.O., S.16

4.2.2.1 Das Lösungsverfahren von LANDAU[1)]

Landau entwickelte für das vorliegende Zahlenbeispiel von Shephard ein Iterationsverfahren, das von folgender Überlegung ausgeht:

Die Produktion einer ME kostet in der Nachtschicht 50 Dollar mehr als in der Tagschicht. Die Lagerhaltungskosten betragen für eine ME 20 Dollar je Periode. Bevor eine Nachtschicht eingelegt wird, ist es deshalb vorteilhafter, die benötigten Mengen ein oder zwei Perioden vorher in einer Tagschicht herzustellen. Erst wenn die Kapazitäten dieser Schichten voll ausgenutzt sind, sollte die Produktion in der Schicht mit den nächsthöheren Kosten fortgesetzt werden.

Mit dieser Entscheidungsregel lassen sich die optimalen Produktionsprogramme für den gesamten Planungszeitraum bestimmen. Zunächst wird die Reihenfolge festgelegt, nach der die noch herzustellende Produktionsmenge auf die einzelnen Schichten verteilt werden muß. In dem vorliegenden Zahlenbeispiel ergibt sich aufgrund der Produktions- und Lagerhaltungskosten die in Tabelle 13 angegebene Rangordnung der verschiedenen Schichten.[2)]

Dieses Optimierungsverfahren wird nun schrittweise für jede Periode durchgeführt, wobei Landau eine vorwärtsschreitende Berechnung wählt. Wesentlich ist, daß die Zuteilung der Produktionsmengen jeweils unter Berücksichtigung der aus der vorhergehenden Stufe resultierenden freien Kapazitäten der einzelnen Schichten erfolgt. Jeder weitere Planungsschritt ist also nur durchführbar, wenn die noch vorhandenen Kapazitäten der bisher betrachteten Perioden nach jeder Zuweisung auf den neuesten Stand gebracht werden.

---

1) Vgl. M.LANDAU, Dynamic Programming und ein einfacheres Verfahren, in: Ablauf- und Planungsforschung 1964, S.96 ff.
2) Die Tabelle 13 wurde mit Änderungen der Arbeit von LANDAU entnommen; vgl. M.LANDAU, a.a.O., S.99

Tabelle 13: Optimale Reihenfolge der Arbeitsschichten für die Aufteilung der nachgefragten Menge einer Periode auf die noch freien Produktionskapazitäten.

	Tagschicht	betrachtete Periode
falls noch zu produzierende Warenmenge übrig	Tagschicht	1 Periode vorher
falls noch zu produzierende Warenmenge übrig	Tagschicht	2 Perioden vorher
falls noch zu produzierende Warenmenge übrig	Nachtschicht	betrachtete Periode
falls noch zu produzierende Warenmenge übrig	Tagschicht	3 Perioden vorher
falls noch zu produzierende Warenmenge übrig	Nachtschicht	1 Periode vorher
falls noch zu produzierende Warenmenge übrig	Tagschicht	4 Perioden vorher
falls noch zu produzierende Warenmenge übrig	Nachtschicht	2 Perioden vorher
falls noch zu produzierende Warenmenge übrig	Tagschicht	5 Perioden vorher

usw

Für das von Shephard entwickelte Modell ergibt sich damit folgendes Lösungsschema:

Tabelle 14: Schematische Darstellung für die Bestimmung des optimalen Produktionsplans.

Die erforderlichen Produktionsmengen werden unter Einhaltung der Kapazitätsbeschränkungen in der angegebenen Reihenfolge zugeteilt.

Periode	Darin benötigte Produktionsmenge	Zugeteilte Produktionsmenge	Zugeteilt an Tagschicht	Zugeteilt an Nachtschicht	Verbleibende Kapazität für Periode :	1	2	3	4	5	6
1	5	5	1. Periode		Tagschicht	10	15	15	15	15	15
					Nachtschicht	15	15	15	15	15	15
2	5	5	2. Periode		Tagschicht	10	10	15	15	15	15
					Nachtschicht	15	15	15	15	15	15
3	10	10	3. Periode		Tagschicht	10	10	5	15	15	15
					Nachtschicht	15	15	15	15	15	15
4	30	15	4. Periode		Tagschicht	10	0	0	0	15	15
		5	3. Periode		Nachtschicht	15	15	15	15	15	15
		10	2. Periode								
5	50	15	5. Periode								
		15		5. Periode	Tagschicht	5	0	0	0	0	15
		15		4. Periode	Nachtschicht	15	15	15	0	0	15
		5	1. Periode								
6	8	8	6. Periode		Tagschicht	5	0	0	0	0	8
					Nachtschicht	15	15	15	0	0	15

Nachdem sämtliche Planungsstufen durchlaufen sind, lassen sich die optimalen Programme unmittelbar dadurch bestimmen, daß die noch freien Kapazitäten der einzelnen Schichten von den ursprünglich vorhandenen Kapazitäten abgezogen werden. Entsprechend ergibt sich für das vorliegende Zahlenbeispiel der in Abschnitt 4.2.2 bereits ermittelte optimale Produktionsplan:

Periode	1	2	3	4	5	6
Tagschicht	10	15	15	15	15	8
Nachtschicht	0	0	0	15	15	0

Der Rechenaufwand dieser Optimierungsmethode hängt wesentlich von den Grenzkosten für die Produktion und den Lagerhaltungskosten ab. Sofern die Grenzkostenkurve linear verläuft (und eventuell einzelne Sprünge aufweist), kann bei konstanten Lagerhaltungskosten relativ leicht eine Rangordnung für die verschiedenen Produktionszeiten in Abhängigkeit von den variablen Kosten aufgestellt werden. Liegen jedoch kompliziertere Kostenverläufe vor, so wird auch die Anwendung des beschriebenen Verfahrens sehr viel schwieriger.

Dieser Sachverhalt soll nun an einem Zahlenbeispiel von Elsner verdeutlicht werden.

4.2.3 Das Modell von ELSNER[1)]

Die Struktur dieses Planungsproblems entspricht dem Modell von Shephard, wobei wiederum ein kostenminimales Produktionsprogramm für 6 Zeitabschnitte mit unterschiedlicher Nachfrage bestimmt werden muß. Der erwartete Bedarf für die einzelnen Perioden wird in Tabelle 15 angegeben.

Tabelle 15: Nachfrage für die Perioden 1 bis 6.

Periode	1	2	3	4	5	6
Bedarf	10	20	40	80	100	30

Die Lagerung einer ME kostet 0,2 GE pro Zeitabschnitt. Da ein linearer Absatz unterstellt wird, ergibt sich der durchschnittliche Lagerbestand für die Periode i durch:

(423.1) $$\frac{L_{i-1} + L_i}{2}$$

Dementsprechend gilt für die variablen Lagerhaltungskosten dieses Zeitabschnittes:

(423.2) $$K_L(L_{i-1}, L_i) = 0{,}2 \; \frac{L_{i-1} + L_i}{2}$$

oder

(423.3) $$K_L(L_{i-1}, L_i) = 0{,}1 \; (L_{i-1} + L_i)$$

Aufgrund der bereits bekannten Transformationsbeziehung

(423.4) $$L_i = L_{i-1} + x_i - B_i$$

müssen die Lagerhaltungskosten der Periode i auch der Bedingung

(423.5) $$K_L(L_{i-1}, x_i) = 0{,}1 \; (2\, L_{i-1} + x_i - B_i)$$

genügen.

---

1) Vgl. K.ELSNER, a.a.O., S.97

Der wesentliche Unterschied gegenüber dem Modell von Shephard besteht darin, daß Elsner von progressiv steigenden Produktionskosten ausgeht. Für die variablen Herstellungskosten eines Zeitabschnittes gibt er folgende Funktion an:

$$(423.6) \qquad K_p(x) = 9\,x + 0{,}02\,x^2$$

Die Summe aus Produktions- und Lagerhaltungskosten ergibt dann für die Periode i die Gleichung:

$$(423.7) \qquad Kv(L_{i-1}, x_i) = 9\,x_i + 0{,}02\,x_i^2 + 0{,}1\,(2\,L_{i-1} + x_i - B_i)$$

oder

$$(423.8) \qquad Kv(L_{i-1}, x_i) = 9{,}1 x_i + 0{,}02\,x_i^2 + 0{,}2\,L_{i-1} - 0{,}1\,B_i$$

Unter Berücksichtigung dieser Kostenfunktion lassen sich wieder die optimalen Produktionsprogramme mit dem von Shephard entwickelten Iterationsverfahren[1] bestimmen. Da in diesem Beispiel keine Kapazitätsbeschränkungen unterstellt werden, können die Grenzen für L und x nur in Abhängigkeit von den Kosten und der nachgefragten Menge festgelegt werden.

Elsner führt die Optimierung in der angegebenen Weise durch, wobei er zur Vereinfachung jeweils 10 ME zusammenfaßt. Das Ergebnis stellt dementsprechend eine Näherungslösung dar.

Bei einer genauen Berechnung des Planungsproblems erhält man die in Tabelle 16 dargestellten optimalen Werte.[2]

Die gesamten variablen Kosten des optimalen Produktionsplans betragen 2.831 GE.

---

1) Vgl. Abschnitt 4.2.2, S. 61 ff.
2) Die optimalen Produktionsprogramme wurden mit einer 360/50 IBM-Anlage berechnet.

Tabelle 16: Optimaler Produktionsplan für den gesamten Planungszeitraum.

Periode	Bedarf	Produktion	Lagerbestand
0	0	0	0
1	10	40	30
2	20	45	55
3	40	50	65
4	80	55	40
5	100	60	0
6	30	30	0

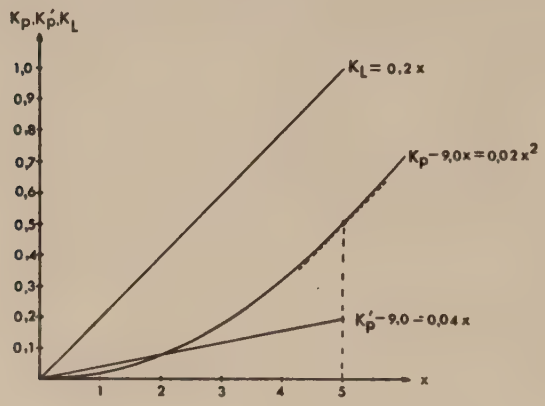
Dieses Beispiel kann auch mit dem von Landau entwikkelten Iterationsverfahren optimiert werden, wobei man von folgender Überlegung ausgehen muß. Für die Grenzkosten der Produktion ergibt sich durch Ableitung der Gleichung (423.6) nach x:

$$(423.9) \qquad K_p'(x) = 9 + 0{,}04\,x$$

Daraus folgt, daß die Grenzkosten mit jeder ME um 0,04 GE ansteigen. Ein Vergleich mit den Lagerhaltungskosten pro Zeitabschnitt und ME (= 0,2 GE) zeigt, daß die Produktionsmenge der einzelnen Perioden nur um jeweils 5 ME (0,04 • 5 = 0,2 GE) höher liegen sollte als die des vorhergehenden Zeitabschnittes. Dieser Zusammenhang wird in Abbildung 11 graphisch verdeutlicht. Bei x = 5 erreicht die Kurve für das quadratische Glied der Produktionskostenfunktion (= $0{,}02\,x^2$) die Steigung der Lagerhaltungskostenkurve.

Da in diesem Modell keine Kapazitätsbeschränkungen unterstellt werden, muß bei der Aufteilung der Produktionsmengen nach der angegebenen Entscheidungsregel lediglich darauf geachtet werden, daß die Nachfrage der einzelnen Zeitabschnitte auch tatsächlich befriedigt werden kann. Bei einer vorwärtsschreitenden Optimierung wird diese Bedingung dadurch erfüllt, daß eine Neuverteilung für die vergangenen Perioden nur dann vorgenommen wird, wenn die Nachfrage des betrachteten Zeitabschnittes die Produktionsmenge der vorhergehenden

Abbildung 11: Graphische Darstellung der Lagerhaltungskosten und der Grenzkosten der Produktion.



Periode um mehr als 5 ME übersteigt. Außerdem darf die Zuteilung nur soweit auf die vorgelagerten Perioden ausgedehnt werden, daß die bereits ermittelten Produktionsmengen dieser Zeitabschnitte nicht wieder verringert werden. Für die Aufteilung erweist es sich als zweckmäßig, zunächst die Nachfrage der betreffenden Perioden zu kumulieren. Dieser Bedarf muß dann den einzelnen Zeitabschnitten so zugeordnet werden, daß die jeweils vorhergehende Periode 5 ME weniger erhält als die nachfolgende. Die entsprechenden Produktionsmengen ergeben sich z.B. für die ersten beiden Zeitabschnitte aus der Bedingung:

(423.10) $$30 = x_2 + x_1 = x_2 + x_2 - 5$$

$$x_2 = 17,5$$

$$x_1 = 12,5$$

In gleicher Weise läßt sich die Optimierung für sämtliche Perioden durchführen, wobei die in Tabelle 17 dargestellten Werte errechnet werden.

Tabelle 17: Bestimmung des optimalen Produktionsplans.

Periode	Nachfrage	Kumulierte Nachfrage	Optimale Produktionsmenge für die Periode : 1	2	3	4	5	6
1	10	10	10					
2	20	30	12,5	17,5				
3	40	70	18,33	23,33	28,33			
4	80	150	30	35	40	45		
5	100	250	40	45	50	55	60	
6	30	280	40	45	50	55	60	30

Die Ergebnisse des letzten Planungsschrittes stellen zugleich die optimalen Produktionsmengen der kostenminimalen Gesamtlösung dar. Mit Hilfe der Transformationsbeziehungen können anschließend die zugehörigen Lagerbestände ermittelt werden. Unter Berücksichtigung der Kostenfunktion lassen sich dann auch die variablen Gesamtkosten für den optimalen Produktionsplan bestimmen.

Wie bereits in Abschnitt 4.2.2.1 erwähnt wurde, eignet sich dieses Verfahren nur dann, wenn die Grenzkosten der Produktion konstant sind bzw. konstant steigen oder fallen. Für andere Kostenverläufe, wie sie sich z.B. bei der klassischen Produktionsfunktion ergeben, verursacht die Bestimmung der Rangordnung der Produktionszeiten erhebliche Schwierigkeiten.

In Tabelle 18 sind einige Kostenfunktionen angegeben, mit denen das Modell von Elsner durchgerechnet wurde. Die Ergebnisse zeigen, daß die Aufteilung der optimalen Produktionsmengen nicht nur von der Steigung der Grenzkostenkurve abhängt, sondern auch von der Höhe der Ausbringungsmenge, bei der das Grenzkosten- bzw. Stückkostenminimum realisiert wird. Zur Verdeutlichung werden in den Abbildungen 12 und 13 die variablen Kosten und die entsprechenden Grenzkosten in Abhängigkeit von der Produktionsmenge graphisch dargestellt.

Die konstanten Glieder der Funktionen werden gleich 0 gesetzt, da sie keinen Einfluß auf die vorliegende Gegenüberstellung ausüben können.

Tabelle 18: Zusammenfassung der optimalen Produktionspläne für verschiedene Kostenfunktionen.

Lfd. Nr.	Kostenfunktion	Wendepunkt bei x=	Stückkostenminimum bei x=	Optimale Produktionsmenge der Periode: 1	2	3	4	5	6	Minimum der gesamten variablen Kosten
I	$0{,}02x_i^2+9{,}1x_i+0{,}2\,L_{i-1}-0{,}1\,B_i$	-227,5	-455	40	45	50	55	60	30	2831,00
II	$0{,}01x_i^3-0{,}14x_i^2+9{,}8x_i+0{,}2\,L_{i-1}-0{,}1\,B_i$	$4{,}\overline{6}$	7	50	50	50	50	50	30	7435,99
III	$0{,}01x_i^3-x_i^2+30x_i+0{,}2\,L_{i-1}-0{,}1\,B_i$	$33{,}\overline{3}$	50	50	50	50	50,	50	30	1540,00
IV	$0{,}0025x_i^3-0{,}3x_i^2+14x_i+0{,}2\,L_{i-1}-0{,}1\,B_i$	40	60	49	51	59	60	61	0	1456,85
V	$0{,}00125x_i^3-0{,}15x_i^2+13{,}5x_i+0{,}2\,L_{i-1}-0{,}1\,B_i$	40	60	60	0	62	63	65	30	2562,20

Abbildung 12: Graphische Darstellung der in Tabelle 18 angegebenen Kostenfunktionen.

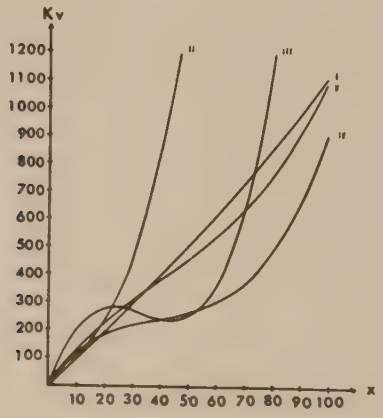
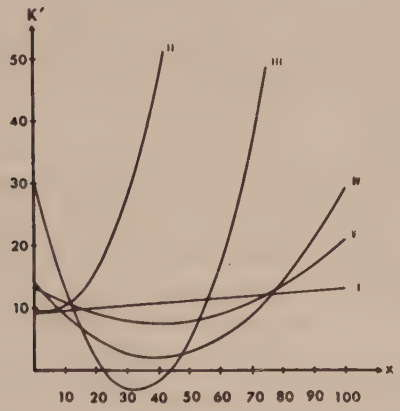


Abbildung 13: Graphische Darstellung der entsprechenden Grenzkostenkurven.



Aus diesem Zusammenhang wird deutlich, daß eine Rangordnung der Produktionszeiten nur in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge der vorhergehenden Zeitabschnitte aufgestellt werden kann, wobei die Zahl der zu berücksichtigenden Alternativen mit jeder weiteren Periode erheblich anwächst. Dadurch wird die Optimierung mit dem von Landau angegebenen Iterationsverfahren derart kompliziert und umfangreich, daß unter solchen Voraussetzungen der Algorithmus von Shephard vorgezogen werden muß.

4.2.4 Das Modell von KÜNZI[1)]

In diesem Abschnitt wird ein Modell von Künzi diskutiert, das gegenüber den bereits bekannten Planungsproblemen einige wesentliche Unterschiede aufweist. Die Nachfrage wird als zufallsabhängige Größe angegeben, deren Verteilungsfunktion mit $\Phi(B)$ und deren Dichtefunktion mit $\zeta(B)$ bezeichnet wird. Die Produktionskosten setzen sich aus den stückabhängigen Herstellungskosten $\left[K_p(x)\right]$ und den Rüstkosten (K_R) zusammen, wobei eine Änderung des Produktionsniveaus auch die Höhe der Rüstkosten beeinflußt. In der Periode i ist K_R deshalb sowohl von x_i als auch von x_{i-1} abhängig. Für die Lagerhaltungskosten muß der Lagerbestand am Ende der einzelnen Zeitabschnitte ermittelt werden, wobei auch hier die Transformationsbeziehung:

$$L_i = L_{i-1} + x_i - B_i \qquad (424.1)$$

gilt. Dabei wird vorausgesetzt, daß nicht erfüllte Bestellungen der vorliegenden Periode verloren sind, so daß auch die Bedingung

$$L_{i-1} \geq 0 \qquad (424.2)$$

eingehalten wird. Aufgrund der zufallsabhängigen Nachfrage kann am Ende des Zeitabschnittes i sowohl ein Lagerbestand als auch eine Fehlmenge auftreten. Der Wert der Transformationsbeziehung wird dementsprechend positiv $(L_{i-1} + x_i - B_i > 0)$ oder negativ $(L_{i-1} + x_i - B_i < 0)$. Die erwarteten Kosten für beide Situationen werden im folgenden mit f bezeichnet. Aus (424.1) ergibt sich, daß diese Kosten von der Höhe des Lagerbestandes L_{i-1} und der Produktionsmenge x_i abhängen, so daß $f = f(L_{i-1}, x_i)$ gilt. Schließlich wird auch ein Diskontierungsfaktor (α) eingeführt, um die erwarteten Kosten der künftigen Perioden abzuzinsen.

Mit diesen Angaben kann der optimale Produktionsplan aufgestellt werden. Da Künzi eine rückwärtsschreitende

---

1) Vgl. H.P.KÜNZI, O.MÜLLER, E.NIEVERGELT, a.a.O., S. 61ff.

Optimierung wählt, werden zunächst die gesamten variablen Kosten der letzten Periode (n) berechnet. Diese ergeben sich aus der Beziehung:

$$(424.3)\quad Kv(L_{n-1},x_{n-1},x_n) = K_p(x_n) + K_R(x_n,x_{n-1}) + f(L_{n-1},x_n)$$

Das Iterationsverfahren zur Bestimmung der relativen Optima entspricht dem Algorithmus von Shephard, wobei hier allerdings 3 Variable berücksichtigt werden müssen. Das Kostenminimum für x_n kann in diesem Beispiel nur in Abhängigkeit vom Lagerbestand und der Produktionsmenge der vorhergehenden Periode angegeben werden. Da diese Größen zu Beginn der Planung noch unbekannt sind, muß für alle theoretisch möglichen Wertpaare von L_{n-1} und x_{n-1} das Kostenminimum in bezug auf x_n berechnet werden. Die entsprechende Zielfunktion lautet dann:

$$(424.4)\quad F_n(x_{n-1},L_{n-1}) = \min_{x_n} \left[K_p(x_n)+K_R(x_n,x_{n-1})+f(L_{n-1},x_n)\right]$$

Unter Berücksichtigung dieser Ergebnisse können im zweiten Planungsschritt die Kosten der letzten beiden Zeitabschnitte minimiert werden, wobei die Werte für $F_n(x_{n-1},L_{n-1})$ zunächst abgezinst werden müssen. Die gesamten variablen Kosten setzen sich dann aus den erwarteten Kosten der betrachteten Periode und den diskontierten minimalen erwarteten Kosten des nachfolgenden Zeitabschnittes zusammen:

$$(424.5)\quad Kv(L_{n-2},L_{n-1},x_{n-2},x_{n-1}) = K_p(x_{n-1}) + K_R(x_{n-2},x_{n-1}) + f(L_{n-2},x_{n-1}) + a \cdot F_n(x_{n-1},L_{n-1})$$

Die Höhe des Lagerbestandes L_{n-1} kann aufgrund der zufallsabhängigen Nachfrage jedoch nicht eindeutig vorgegeben werden, so daß der Erwartungswert der Kosten entsprechend der Wahrscheinlichkeitsverteilung für B_{n-1} berechnet werden muß. Bei einer stetigen Verteilung läßt sich der Wert durch Integration über den

gesamten Bereich der Zufallsvariablen bestimmen. Unter Berücksichtigung der Transformationsbeziehung

$$(424.6) \qquad L_{n-1} = L_{n-2} + x_{n-1} - B_{n-1}$$

ergibt sich dann:

$$(424.7) \quad Kv(L_{n-2},x_{n-2},x_{n-1}) = K_p(x_{n-1}) + K_R(x_{n-2},x_{n-1}) + f(L_{n-2},x_{n-1}) + a \cdot \int_0^{\infty} F_n(x_{n-1},L_{n-2}+x_{n-1}-B_{n-1}) \cdot \Phi(B_{n-1}) \cdot dB_{n-1}$$

Handelt es sich um eine diskrete Verteilung, so müssen die Einzelwahrscheinlichkeiten für alle möglichen Ausprägungen von B_{n-1} mit den zugehörigen Werten von F_n multipliziert und anschließend summiert werden. Für die gesamten erwarteten Kosten bis zum Planungshorizont gilt dann der Ausdruck:

$$(424.8) \quad Kv(L_{n-2},x_{n-2},x_{n-1}) = K_p(x_{n-1}) + K_R(x_{n-2},x_{n-1}) + f(L_{n-2},x_{n-1}) + a \cdot \sum_{B_{n-1}} F_n(x_{n-1},L_{n-2}+x_{n-1}-B_{n-1}) \cdot \zeta(B_{n-1})$$

Entsprechend der Verteilungsfunktion muß entweder die Gleichung (424.7) oder die Gleichung (424.8) minimiert werden. Die Bestimmung der relativen Optima erfolgt in der gleichen Weise wie im ersten Planungsschritt, indem wiederum für jedes zulässige Wertepaar von L_{n-2} und x_{n-2} das Minimum der Kostenfunktion in bezug auf x_{n-1} ermittelt wird. Damit ergibt sich z.B. für eine diskrete Verteilungsfunktion die Bedingung:

$$(424.9) \quad F_{n-1}(L_{n-2},x_{n-2}) = \min_{x_{n-1}} \Big[K_p(x_{n-1}) + K_R(x_{n-2},x_{n-1}) + f(L_{n-2},x_{n-1}) + a \cdot \sum_{B_{n-1}} F_n(x_{n-1},L_{n-2}+x_{n-1}-B_{n-1}) \cdot \zeta(B_{n-1}) \Big]$$

Dieses Iterationsverfahren muß für sämtliche Zeitabschnitte durchgeführt werden. Im letzten Planungsschritt können dann die diskontierten minimalen erwarteten Kosten des gesamten Zeitraumes angegeben werden. Die entsprechende Zielfunktion lautet:

$$(424.10)\quad F_1(L_o,x_o) = \min_{x_1} \Big[K_p(x_1)+K_r(x_o,x_1)+ f(L_o,x_1) + a \cdot \sum_{B_1} F_2(x_1,L_o+x_1-B_1)\cdot \zeta(B_1) \Big]$$

Der Lagerbestand und die hergestellte Menge der Periode o sind jedoch zu Beginn des ersten Zeitabschnittes bekannt, so daß nur für dieses Wertepaar von L_o und x_o die kostenminimale Produktionsmenge x_1 bestimmt werden muß. Am Ende der ersten Periode steht auch der Lagerbestand L_1 fest, so daß aufgrund der ermittelten relativen Optima für die realisierten Werte von x_1 und L_1 die kostenminimale Produktionsmenge x_2 vorgegeben werden kann. In gleicher Weise läßt sich am Ende jedes Zeitabschnittes die günstigste Ausbringungsmenge der nachfolgenden Periode festlegen. Diese Entscheidungen sind allerdings nur dann optimal, wenn der entsprechende Planungshorizont so groß gewählt wird, daß alle möglichen Einflüsse künftiger Entwicklungen auf die Ergebnisse des betrachteten Zeitabschnittes erfaßt werden.

Künzi gibt für dieses Modell ein Zahlenbeispiel an, das mit Hilfe eines Elektronenrechners gelöst wurde.[1] Der gesamte Planungszeitraum besteht aus 10 Perioden, wobei unterstellt wird, daß die Zielfunktion des letzten Zeitabschnittes (n) für alle Ausprägungen von x_{n-1} und L_{n-1} den Wert 0 annimmt:

$$(424.11)\qquad F_n(L_{n-1},x_{n-1}) = 0$$

Für die zufallsabhängige Nachfrage wird die in Tabelle 19 dargestellte Wahrscheinlichkeitsverteilung angegeben:

---

1) Ebenda, S.64 ff.

Tabelle 19: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Nachfrage.

B^o	Verteilungsfunktion Wahrscheinlichkeit, daß die Zufallsvariable einen Wert annimmt, der kleiner gleich B^o ist $\Phi(B^o) = \sum_{B \leq B^o} \zeta(B)$	Dichtefunktion Wahrscheinlichkeit, daß die Zufallsvariable B den Wert B^o annimmt $\zeta(B^o)$
5	0,05	0,05
6	0,15	0,10
7	0,27	0,12
8	0,39	0,12
9	0,55	0,16
10	0,70	0,15
11	0,82	0,12
12	0,92	0,10
13	0,97	0,05
14	1,00	0,03

Die variablen Stückkosten der Produktion sind konstant und betragen 100 GE.

Für die Rüstkosten wird folgende Bedingung unterstellt:

$$(424.12) \quad K_R(x_i, x_{i-1}) = 0 \quad \text{für} \; |x_i - x_{i-1}| \leq 2$$
$$= 50(x_i - x_{i-1})^{1.5} \quad \text{für} \; |x_i - x_{i-1}| > 2$$

Bevor die Kosten für die Lager- bzw. Fehlmengen angegeben werden können, müssen zunächst die Erwartungswerte für beide Größen bestimmt werden. Wie bereits oben gezeigt wurde, ergibt sich dann ein Lagerbestand,

wenn

$$(424.13) \qquad L_{i-1} + x_i - B_i > 0$$

gilt. Wird dieser Ausdruck negativ, so entsteht eine Fehlmenge. Welche Situation eintritt, hängt also davon ab, ob B_i größer oder kleiner ist als $L_{i-1} + x_i$. Setzen wir für $L_{i-1} + x_i$ das Symbol Y_i, dann muß für eine Fehlmenge der Erwartungswert (EW) dafür bestimmt werden, daß die Nachfrage größer ist als Y_i. Die entsprechende Beziehung lautet dann:

$$(424.14) \quad (1 - \Phi(Y_i)) \cdot EW(B_i / B_i > Y_i) = (1 - \Phi(Y_i)) \cdot \sum_{B_i > Y_i} B_i \frac{\zeta(B_i)}{1 - \Phi(Y_i)}$$

Für einen Lagerbestand muß der Erwartungswert unter der Bedingung angegeben werden, daß die Nachfrage kleiner ist als Y_i:

$$(424.15) \quad \Phi(Y_i) \cdot EW(B_i / B_i < Y_i) = \Phi(Y_i) \cdot \sum_{B_i < Y_i} B_i \frac{\zeta(B_i)}{\Phi(Y_i)}$$

Die Fehlmengenkosten pro Stück betragen in diesem Beispiel 300 GE und die Lagerhaltungskosten pro Stück 70 GE. Damit ergeben sich die erwarteten Kosten für die Lagermengen bzw. Fehlmengen aus der Bedingung:

$$f(L_{i-1}, x_i) = 300 \cdot (1 - \Phi(Y_i)) \cdot EW(B/B_i > Y_i) + 70 \cdot \Phi(Y_i) \cdot EW(B_i / B_i < Y_i)$$

Unter Berücksichtigung eines Diskontierungsfaktors von $a = 0{,}9$ ermittelte Künzi für diese Werte die optimalen Produktionsmengen nach dem oben angegebenen Iterationsverfahren. Zur Veranschaulichung werden die Ergebnisse für den ersten Zeitabschnitt in Tabelle 20[1] dargestellt.

---

1) Ebenda, S.67

Tabelle 20: Darstellung der optimalen Produktionsmengen in Abhängigkeit von der Fertigungsmenge und dem Lagerbestand der vorhergehenden Periode.

Zeitabschnitt: 1

x_o \ L_o	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	5 134	6 133	3 130	3 130	3 128	3 126	7 124	6 123	7 121	6 119	5 117	4 116	3 114	3 113	3 112
2	5 133	4 130	6 129	4 128	4 126	8 125	7 122	6 121	7 119	6 117	5 116	4 113	4 112	4 112	4 111
3	5 130	5 130	5 128	5 126	9 125	8 123	7 121	8 119	7 117	6 116	5 113	5 112	5 112	5 111	4 111
4	6 129	6 127	6 125	6 125	9 123	8 121	7 119	6 117	7 116	6 113	6 112	6 112	5 112	5 111	4 111
5	7 128	7 126	7 125	7 124	7 122	8 120	7 117	8 116	7 113	7 113	6 112	6 112	5 112	5 111	4 111
6	8 126	8 126	8 124	8 122	8 120	8 117	7 117	8 114	7 113	7 113	6 112	6 112	5 112	5 111	4 111
7	9 126	9 124	9 122	9 121	9 118	8 117	9 115	8 114	7 113	7 113	6 112	6 112	5 112	5 111	5 111
8	10 125	10 123	10 121	10 119	9 118	10 116	9 115	8 114	7 113	7 113	6 112	6 112	6 112	6 112	6 112
9	11 124	11 122	11 120	10 119	11 117	10 116	9 115	8 114	7 113	7 113	7 113	7 113	7 113	7 113	7 114
10	12 123	12 121	11 120	10 119	11 117	10 116	9 115	8 114	8 114	8 114	8 114	8 114	8 114	8 115	8 116
11	13 123	12 121	11 120	10 119	11 117	10 116	9 115	9 114	9 115	9 115	9 115	9 116	9 117	7 117	7 118
12	13 123	12 121	11 120	10 119	11 117	10 116	10 116	10 116	10 117	10 117	8 118	8 118	8 118	7 119	7 119
13	13 123	12 121	11 120	12 119	11 117	11 117	11 118	9 118	9 119	9 119	8 119	8 120	8 120	7 121	7 121
14	13 123	12 121	13 121	12 119	12 120	10 120	10 120	10 120	9 120	9 121	9 121	8 121	8 122	8 122	7 123
15	13 123	12 124	13 121	12 122	11 121	10 121	10 121	10 122	9 122	9 122	9 123	8 123	8 124	8 124	8 125

Der Vorteil dieses Modells besteht darin, daß in Abhängigkeit von der Produktionsmenge und dem Lagerbestand der vorhergehenden Periode eine Entscheidungsregel für den nächsten Zeitabschnitt gegeben wird, die zu minimalen Gesamtkosten führt. Ergibt sich z.B. am Ende der Periode 0 ein Lagerbestand von 9 ME und betrug die Produktion im selben Zeitabschnitt 6 ME, dann liefert der Inhalt des Feldes (6,9) den optimalen Wert für x_1 (= 7 ME) und den entsprechenden Barwert für die minimalen erwarteten Kosten der nächsten 10 Perioden (= 113 GE).

Da in diesem Modell 3 Variable auftreten, kann der Rechenaufwand für ein einigermaßen realistisches Zahlenbeispiel nur noch mit Hilfe eines Elektronenrechners bewältigt werden. Deshalb ist dieses Iterationsverfahren nur dann brauchbar, wenn die dadurch erzielte Kostensenkung mindestens die Kosten der Optimierung deckt. In der Praxis kann es durchaus sinnvoll sein, mit dem angegebenen Algorithmus eine Näherungslösung zu bestimmen, indem nicht für jede Mengeneinheit sondern nur für 10, 100 oder 1000 ME eine Entscheidungsregel aufgestellt wird.

Aus dieser Darstellung ergibt sich, daß mit den vorliegenden Modellen ein optimaler Produktionsplan für ein oder mehrere Erzeugnisse unter Berücksichtigung der Absatzmengen, der Kapazitätsbeschränkungen, des Leistungszeitraumes, der Leistungszeit und evtl. der Leistungsintensität bestimmt werden kann. Unbeachtet bleiben dagegen die Absatzpreise, die Programmweite, alternative Fertigungsverfahren und die Arbeitsgangfolge. Deshalb soll im nächsten Abschnitt ein Problem der Ablaufplanung dargestellt werden, das sich ebenfalls mit Hilfe der dynamischen Programmierung lösen läßt.

4.3 Ein Produktionsreihenfolgeproblem

Im folgenden wird ein Modell aus der Literatur[1] diskutiert, das sich mit der optimalen Gestaltung des Produktionsablaufs befaßt. Dabei wird unterstellt, daß n verschiedene Werkstücke 2 Bearbeitungsstufen (A und B) in der Reihenfolge AB durchlaufen müssen. Die Bearbeitungszeiten sind für sämtliche Werkstücke bekannt. Das Produkt i benötigt a_i Zeiteinheiten auf der Maschine A und b_i Zeiteinheiten auf der Maschine B. Es ist nicht möglich, daß während des Produktionsprozesses ein Werkstück durch ein anderes überholt wird.

Das Ziel der Planung besteht darin, die gesamte Durchlaufzeit für alle Produkte zu minimieren.[2] Es muß also die Reihenfolge ausgewählt werden, die es ermöglicht, die n verschiedenen Werkstücke in der kürzesten Zeit fertigzustellen.

Für dieses Kriterium kann mit Hilfe der dynamischen Programmierung eine optimale Lösung bestimmt werden. Der entsprechende Algorithmus ergibt sich durch folgende Überlegungen.

Für m verbleibende Werkstücke kann die benötigte Produktionszeit durch

$$(43.1) \quad f(a_1,b_1,a_2,b_2,.....a_i,b_i,.....a_m,b_m;t)$$

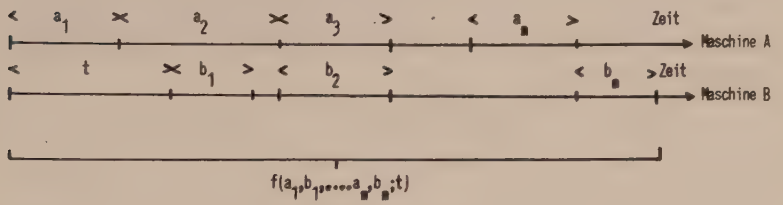
angegeben werden. Dabei wird mit t die Zeit berücksichtigt, in der die Maschine B noch durch das vorhergehende Werkstück belegt ist. Dieser Sachverhalt läßt sich graphisch folgendermaßen darstellen:

---

1) Ebenda, S. 69ff.; vgl. auch M.SASIENI, A.YASPAN, L.FRIEDMAN, a.a.O., S. 260ff.

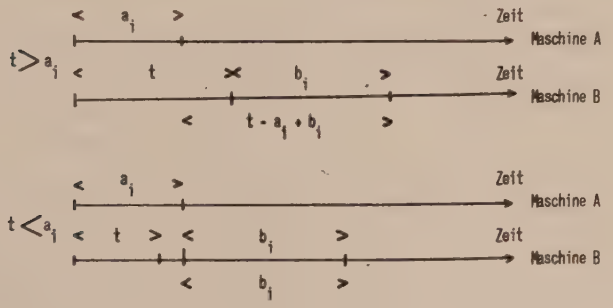
2) Es muß jedoch beachtet werden, daß die Ermittlung der kürzesten Durchlaufzeit nur unter bestimmten Voraussetzungen die kostenminimale bzw. gewinnmaximale Lösung des Problems darstellt; vgl. D.ADAM, a.a.O., S. 131; E.GUTENBERG, Grundlagen..., Die Produktion, a.a.O., S.214

Abbildung 14:[1] Graphische Darstellung der gesamten Durchlaufzeit für m verbleibende Werkstücke.



Um die Durchlaufzeit minimieren zu können, muß von den verbleibenden m Werkstücken zunächst ein i-tes so ausgewählt werden, daß der Ausdruck $(t - a_i)$ maximiert wird. Diese Bedingung ergibt sich unmittelbar, wenn man die beiden Situationen $t > a_i$ und $t < a_i$ betrachtet:

Abbildung 15: Graphische Darstellung der Durchlaufzeit des Produktes i für $t > a_i$ und $t < a_i$.



Aus Abbildung 15 wird deutlich, daß $t < a_i$ zu einer Stillstandszeit der Maschine B führt und damit eine längere Durchlaufzeit verursacht als $t > a_i$. Wird dementsprechend der Ausdruck $(t-a_i)$ maximiert, dann geht die Gleichung (43.1) in

$$(43.2) \quad \min_i \left[a_i + f\left[a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,0,0\ldots a_m,b_m;b_i + \max(t-a_i,0)\right]\right]$$

über.

---

1) Die Abbildungen 14 bis 17 wurden der Arbeit von KÜNZI entnommen; vgl. H.P.KÜNZI, O.MÜLLER, E.NIEVERGELT, a.a.O., S.70-75

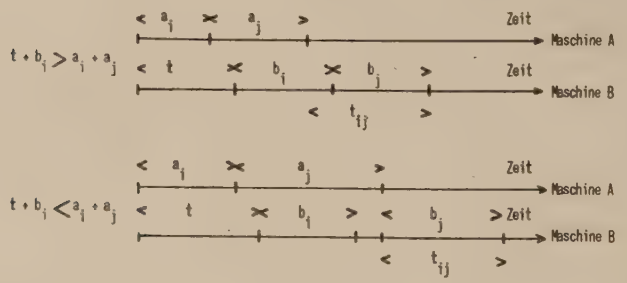
Nachdem die Bearbeitung des Werkstückes i auf der Maschine A beendet ist, wird die Maschine B noch $[b_i + Max(t-a_i,0)]$ Zeiteinheiten durch das Produkt i belegt. Wählt man als nächstes das Werkstück j aus, dann ergibt sich für (43.1):

$$f(a_1,b_1,\ldots a_i,b_i,\ldots a_j,b_j,\ldots a_m,b_m;t) =$$

$$(43.3) \quad a_i+a_j+f(a_1,b_1,\ldots 0,0,\ldots 0,0,\ldots a_m,b_m;\ t_{ij}),$$

wobei t_{ij} die Zeit angibt, die auf der Maschine B zur Bearbeitung der Produkte i und j noch benötigt wird, wenn die Fertigung beider Stücke auf der Maschine A bereits abgeschlossen ist. In Abbildung 16 wird dieser Zusammenhang sowohl für die Bedingung $t + b_i > a_i + a_j$ als auch für $t + b_i < a_i + a_j$ graphisch dargestellt.

Abbildung 16: Graphische Darstellung der Durchlaufzeit für die Produkte i und j.



Damit wird deutlich, daß zur Vermeidung von Stillstandszeiten auf der Maschine B das Werkstück als zweites ausgewählt werden muß, durch welches der Ausdruck $[t + b_i - (a_i + a_j)]$ maximiert wird. Unter Berücksichtigung der optimalen Bedingung des ersten Planungsschrittes gilt dann für die gesamte Durchlaufzeit der Produkte i und j die Bedingung:

$$(43.4) \quad a_i+a_j+t_{ij} = Max\left[Max(t,a_i)+b_i,a_i+a_j\right]+b_j$$

Durch entsprechende Transformation dieser Gleichung kann ein allgemeingültiges Kriterium für die optimale Reihenfolge der Werkstücke aufgestellt werden. Aus (43.4) ergibt sich für t_{ij}:

$$(43.5) \quad t_{ij} = b_j - a_i - a_j + \text{Max}\left[\text{Max}(t, a_i) + b_i, a_i + a_j\right]$$

oder

$$(43.6) \quad t_{ij} = b_i + b_j - a_i - a_j + \text{Max}\left[\text{Max}(t, a_i), a_i + a_j - b_i\right]$$

Da t unabhängig von der Reihenfolge der verbleibenden m Werkstücke ist, gilt auch:

$$(43.7) \quad t_{ij} = b_i + b_j - a_i - a_j + \text{Max}\left[t, \text{Max}(a_i, a_i + a_j - b_i)\right]$$

Für die Reihenfolge ji lautet die entsprechende Bedingung:

$$(43.8) \quad t_{ji} = b_i + b_j - a_i - a_j + \text{Max}\left[t, \text{Max}(a_j, a_i + a_j - b_j)\right]$$

Da t_{ij} und t_{ji} unabhängig von dem künftigen Produktionsablauf sind, kann durch eine Gegenüberstellung der Funktionen (43.7) und (43.8) das Optimalitätskriterium bestimmt werden. Mit t_{ij} bzw. t_{ji} wird der Zeitraum angegeben, der für die Maschine B noch benötigt wird, wenn die Produktion auf der Maschine A bereits beendet worden ist. Dementsprechend führt die Reihenfolge zur kürzesten Durchlaufzeit, bei der die Zeitspanne zwischen dem Produktionsende der Maschine A und dem der Maschine B am geringsten ist.

Erweist sich die Reihenfolge ij als optimal, so gilt folglich:

$$(43.9) \quad t_{ij} \leq t_{ji}$$

oder

$$(43.10) \quad b_i + b_j - a_i - a_j + \text{Max}\left[t, \text{Max}(a_i, a_i + a_j - b_i)\right] \leq b_i + b_j - a_i - a_j + \text{Max}\left[t, \text{Max}(a_j, a_i + a_j - b_j)\right]$$

Diese Bedingung kann noch wesentlich vereinfacht werden. Aus (43.10) ergibt sich

(43.11) $\text{Max}\ [t, \text{Max}(a_i, a_i+a_j-b_i)] \leq \text{Max}\ [t, \text{Max}(a_j, a_i+a_j-b_j)]$

oder

(43.12) $\text{Max}(a_i, a_i+a_j-b_i) \leq \text{Max}(a_j, a_i+a_j-b_j)$

Vermindert man beide Seiten um a_i und a_j, dann gilt:

(43.13) $\text{Max}\ (0, a_j-b_i) \leq \text{Max}\ (a_j-a_i, a_j-b_j)$

bzw.

(43.14) $\text{Max}\ (-a_j, -b_i) \leq \text{Max}\ (-a_i, -b_j)$

oder

(43.15) $\text{Min}\ (a_j, b_i) \geq \text{Min}\ (a_i, b_j)$

Entsprechend dieser Ungleichung kann also die optimale Reihenfolge dadurch festgelegt werden, daß von den verschiedenen Bearbeitungszeiten jeweils die kürzeste ausgewählt wird. Ergibt sich z.B.

(43.16) $\text{Min}\ (a_i, a_j, b_i, b_j) = a_i$

oder

(43.17) $\text{Min}\ (a_i, a_j, b_i, b_j) = b_j$,

dann muß das Werkstück i vor dem Werkstück j bearbeitet werden, weil in beiden Fällen die Bedingung (43.15) erfüllt ist.

Aufgrund dieses Optimierungskriteriums kann für eine beliebige Zahl von Werkstücken folgender Algorithmus

aufgestellt werden:

1. Die Werte für a_i und b_i werden in 2 Kolonnen untereinandergeschrieben:

i	a_i	b_i
1	a_1	b_1
2	a_2	b_2
3	a_3	b_3
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	a_n	b_n

2. Die kürzeste Bearbeitungszeit a_i oder b_i wird ermittelt. Handelt es sich um einen a_i-Wert, dann wird das Werkstück an die erste Stelle gesetzt; handelt es sich um einen b_i-Wert, dann wird das Werkstück an die letzte Stelle gesetzt. Bei gleichen Bearbeitungszeiten kann die Auswahl beliebig erfolgen.

3. Anschließend wird der minimale Wert und die entsprechende Bearbeitungszeit auf der anderen Maschine gestrichen.

4. Die Schritte 2 und 3 müssen für die n-1 verbleibenden Werkstücke wiederholt werden.

Dieses Iterationsverfahren soll nun an einem Zahlenbeispiel verdeutlicht werden. Für 5 Werkstücke werden folgende Bearbeitungszeiten angegeben:

i	a_i	b_i
1	6	3
2	4	5
3	10	15
4	2	6
5	4	3

Die kürzeste Bearbeitungszeit ist $a_4 = 2$, so daß im ersten Planungsschritt das Werkstück 4 an die erste Stelle gesetzt wird. Dementsprechend gilt für die optimale Reihenfolge: (4....).

Da a_4 und b_4 anschließend gestrichen werden, muß im zweiten Iterationsschritt das Minimum der verbleibenden Werte bestimmt werden. Aus der folgenden Übersicht ergeben sich b_1 und b_5 als kürzeste Bearbeitungszeiten:

i	a_i	b_i
1	6	3
2	4	5
3	10	15
5	4	3

Wählt man zunächst b_1 aus, so muß das Werkstück 1 an die letzte Stelle gesetzt werden. Die optimale Reihenfolge lautet dann: (4...1).

Da a_1 und b_1 wieder gestrichen werden, sind für den 3. Iterationsschritt nur noch die Bearbeitungszeiten der Werkstücke 2, 3 und 5 relevant:

i	a_i	b_i
2	4	5
3	10	15
5	4	3

In diesem Falle ist die kürzeste Bearbeitungszeit $b_5 = 3$, so daß für die optimale Reihenfolge gilt: (4..5,1).

Von den verbleibenden Werkstücken ergibt sich im 4. Planungsschritt $a_2 = 4$ als minimale Bearbeitungszeit:

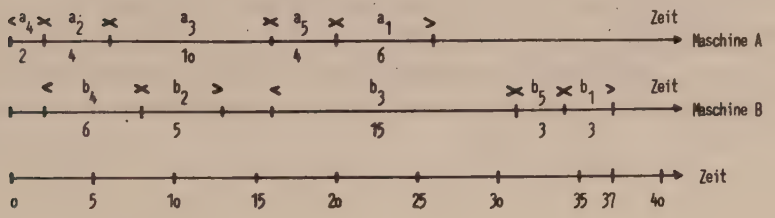
i	a_i	b_i
2	4	5
3	10	15

Die entsprechende optimale Reihenfolge lautet dann: (4,2.5,1) bzw. (4,2,3,5,1).

Damit kann die minimale Durchlaufzeit für alle 5 Produkte realisiert werden. Sie beträgt in dem vorliegen-

den Zahlenbeispiel 37 Zeiteinheiten. In Abbildung 17 wird der optimale Produktionsablauf graphisch dargestellt:

Abbildung 17: Graphische Darstellung der minimalen Durchlaufzeit für sämtliche Produkte.



Wird im 2. Iterationsschritt zunächst b_5 ausgewählt, dann erhält man als optimale Reihenfolge: (4,2,3,1,5). Die entsprechende Durchlaufzeit beträgt ebenfalls 37 Zeiteinheiten. Der beschriebene Algorithmus liefert also nicht nur eine, sondern sämtliche optimalen Lösungen.

Der Nachteil dieses Optimierungsverfahrens besteht darin, daß nur 2 Bearbeitungsstufen berücksichtigt werden. Zwar kann unter bestimmten Voraussetzungen die Fertigungszeit auch für 3 Aggregate minimiert werden,[1] bei 4 oder mehr Arbeitsgängen versagt diese Methode jedoch vollkommen.

Die Brauchbarkeit des vorliegenden Modells wird außerdem dadurch stark eingeengt, daß Beschränkungen für die Bereitstellung der erforderlichen Produktionsfaktoren nicht erfaßt werden können. Mögliche Rückwirkungen auf das Produktionsprogramm bleiben deshalb unbeachtet.

Problematisch ist auch die Zielbedingung. Wie bereits erwähnt wurde,[2] ist die Realisierung der kürzesten

1) Vgl. M.SASIENI, A.YASPAN, L.FRIEDMAN, a.a.O.,S.262 ff.
2) Vgl. Fußnote (1) S. 25

Fertigungszeit nicht unbedingt mit der Kostenminimierung identisch. Darüber hinaus - und diese Kritik gilt für alle bisher dargestellten Modelle - führt die Minimierung der variablen Kosten nur dann zum größtmöglichen Gewinn, wenn die in Abschnitt 2.2.2[1)] genannten Voraussetzungen erfüllt sind.

Deshalb werden im nächsten Abschnitt einige Modelle diskutiert, deren Optimierungskriterium die Deckungsbeitragsmaximierung ist. Besondere Beachtung finden dabei die bislang unberücksichtigten Absatzpreise, alternative Fertigungsverfahren und die Programmweite.

---

1) Vgl. S. 13

5 Erweiterte Entscheidungsmodelle zur Bestimmung des optimalen Produktionsplans

5.1 Erstes Modell: Einproduktbetrieb mit einstufiger Fertigung

Das folgende Planungsproblem ist eine Weiterführung der von Pack entwickelten Modelle.[1] Der wesentlichste Unterschied besteht darin, daß Pack nur produktionspolitisch bedingte Einflußgrößen berücksichtigt, während hier auch Determinanten des Absatzbereiches erfaßt werden.

5.1.1 Die Voraussetzungen des Modells

Ein einstufiger Produktionsbetrieb besitzt 6 verschiedene Aggregate - bzw. Fertigungsverfahren - mit denen ein bestimmtes Erzeugnis hergestellt werden kann. Die Produktionsplanung wird für einen Monat durchgeführt, wobei 20 Arbeitstage mit je 8 Stunden Normalarbeitszeit angenommen werden. Dementsprechend stehen in dem betrachteten Zeitraum 160 Stunden bzw. 9600 Minuten Produktionszeit zur Verfügung. Diese Zeitspanne wird im folgenden als Normalkapazität eines Monats bezeichnet. Weiterhin wird unterstellt, daß täglich 2 Überstunden eingelegt werden können, so daß sich eine "Überstundenkapazität" von 40 Stunden oder 2400 Minuten ergibt. Da die Bearbeitungszeiten als bekannt vorausgesetzt werden, kann man diese Kapazitäten für jedes Aggregat auch in Mengeneinheiten angeben. In dem vorliegenden Modell werden z.B. 20 Minuten für eine Produkteinheit auf der Anlage 1 benötigt. Bei einer Arbeitszeit von 8 Stunden pro Tag können also in einem Monat auf der Maschine 1 maximal (9600 : 20 =) 480 ME hergestellt wer-

---

1) Vgl. L.PACK, a.a.O., S. 273 - 353

den. Die entsprechende Überstundenkapazität der Maschine 1 beträgt dann (2400 : 20 =) 120 ME.[1] Reichen diese Kapazitäten nicht aus, um den Bedarf zu decken, dann besteht außerdem die Möglichkeit, die Intensität einzelner Aggregate zu steigern. In Spalte 9 der Tabelle 21[2] wird für jede Maschine die Menge angegeben, die durch eine intensitätsmäßige Anpassung zusätzlich in einem Monat hergestellt werden kann. Diese Ausbringungsmenge wird als Intensitätssteigerungskapazität bezeichnet. Die gesamte verfügbare Kapazität einer Anlage setzt sich dementsprechend aus der Normal-, der Überstunden- und der Intensitätssteigerungskapazität zusammen. Dadurch ergeben sich z.B. für das erste Aggregat 480 ME + 120 ME + 24 ME = 624 ME.[3]

Um einen optimalen Produktionsplan aufstellen zu können, muß für jede Produktiveinheit die Kostenkurve in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge bestimmt werden. Es wird unterstellt, daß der Einsatz einer Maschine innerhalb der Normalkapazität konstante variable Produktionskosten pro Stunde bzw. Minute verursacht. Dadurch ergeben sich auch konstante variable Stückkosten für die Fertigung innerhalb der normalen Arbeitszeit. Der Kostensatz für eine Minute beträgt z.B. bei der ersten Anlage 3,90 DM, so daß die variablen Produktionskosten für eine ME aufgrund der Bearbeitungszeit (= 20 Minuten) mit 78,- DM angesetzt werden müssen.[4] Dementsprechend ergibt sich im Bereich der Normalkapazität ein linearer Kostenverlauf der z.B. für die Maschine 1 bei x = 480 ME endet.

Werden Überstunden eingelegt, so steigen die variablen Herstellungskosten insbesondere dadurch, daß höhere Löhne - Überstundenzuschläge - gezahlt werden müssen.

---

1) Vgl. in Tabelle 21 die Spalten 2 und 11 bzw. 8 und 12, S. 115
2) Vgl. S. 115
3) Vgl. in Tabelle 21 die Spalten 8,9,11 und 13, S.115
4) Vgl. in Tabelle 21 die Spalten 2 bis 5

Tabelle 21: Übersicht über die für das herzustellende Produkt erforderlichen Angaben hinsichtlich der technischen Beschaffenheit der Maschinen 1 bis 6 und der entsprechenden Kostenentwicklung.

Maschine	Bearbeitungszeit in Min. für 1 ME	Kv/Min. in DM	Kv/Std. in DM	Kv/Stück in DM	Anstieg der variablen Kosten bei Überstunden in %	Kv pro Überstunde in DM	Überstundenkapazität in Stück	Intensitätskapazität in Stück	Kostenfunktion für die Intensitätssteigerung	Normalkapazität in Stück	+ Überstundenkapazität in Stück	+ Intensitätskapazität in Stück
1	2o	3,9o	234,oo	78,oo	15	89,7o	12o	24	$o,o3x^2 + o,o$	48o	6oo	624
2	24	3,6o	216,oo	86,4o	1o	95,o4	1oo	32	$o,o1x^2 + o,o$	4oo	5oo	532
3	24	3,3o	198,oo	79,2o	1o	87,12	1oo	24	$o,o2x^2 + o,o$	4oo	5oo	524
4	3o	2,6o	156,oo	78,oo	8	84,24	8o	32	$o,o3x^2 + o,o$	32o	4oo	432
5	4o	2,2o	132,oo	88,oo	6	93,28	6o	12	$o,o4x^2 + 5,o$	24o	3oo	312
6	4o	2,oo	12o,oo	8o,oo	6	84,8o	6o	o	$o,ox^2 + o,o$	24o	3oo	3oo

Je nach dem Anteil der Lohnkosten an den gesamten variablen Produktionskosten, kann der Prozentsatz ermittelt werden, um den die bereits bekannten Stückkosten für die normale Arbeitszeit während der Überstunden ansteigen. In Spalte 6 der Tabelle 21 werden diese Prozentsätze für die einzelnen Produktiveinheiten angegeben. Bei der ersten Anlage erhöhen sich z.B. die Kosten für eine ME um 15% und betragen dementsprechend in der Überstunde 89,70 DM.[1] Damit ergibt sich auch für die Überstundenkapazität ein linearer Kostenverlauf, der sich von dem der Normalkapazität nur durch den steileren Anstieg unterscheidet.[2]

In dem vorliegenden Modell wird unterstellt, daß bei einer Intensitätssteigerung die variablen Herstellungskosten progressiv ansteigen. Diese Entwicklung kann z.B. durch einen überhöhten Verbrauch an Schmiermitteln und Energien oder durch einen stärkeren Verschleiß der Aggregate verursacht werden. Für die zusätzlich anfallenden variablen Produktionskosten pro Stück werden die in Spalte 10 der Tabelle 21 dargestellten funktionalen Beziehungen angegeben.

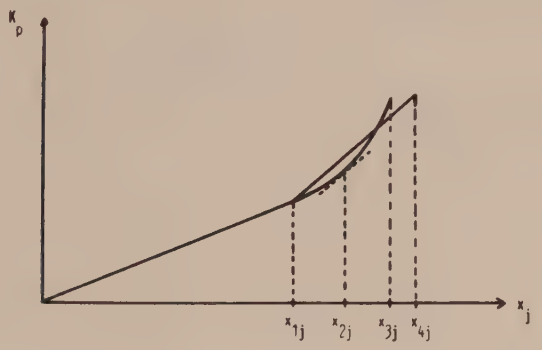
Man beachte, daß die Funktionen der Spalte 10 nur die Steigung der Grenzkosten bestimmen. Erhöht man z.B. die Produktion der ersten Maschine durch intensitätsmäßige Anpassung um 1 ME, dann betragen die variablen Herstellungskosten für dieses Produkt $78,00 + 0,03 \cdot 1^2 + 0,0 = 78,03$ DM. Bei 2 ME ergeben sich dementsprechend $78,00 + 0,03 \cdot 2^2 + 0,0 = 78,12$ DM Grenzkosten für das zweite Produkt.

In Abbildung 18 wird der Kostenverlauf auch für die Intensitätssteigerungskapazität graphisch verdeutlicht.

---

1) Vgl. in Tabelle 21 die Spalten 6 und 7
2) Vgl. Abbildung 18 S. 117

Abbildung 18: Graphische Darstellung der variablen Produktionskosten für verschiedene Anpassungsarten bei dem Aggregat j.



x_j = Produktionsmenge des Aggregates j

x_{1j} = Normalkapazität

$x_{3j} - x_{1j}$ = Intensitätssteigerungskapazität

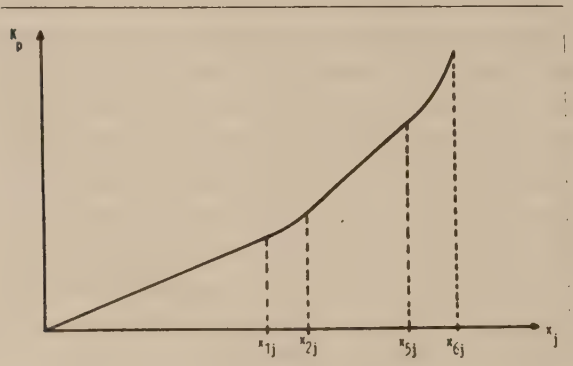
$x_{4j} - x_{1j}$ = Überstundenkapazität

Das Schaubild zeigt nur eine mögliche Kostenentwicklung, wobei die Produktionskosten für die intensitätsmäßige Anpassung zunächst geringer ansteigen als für die Überstunden. Ebenso könnte der Kostenverlauf für eine Intensitätssteigerung von vornherein über dem der Überstundenproduktion liegen. Aus Abbildung 18 geht hervor, daß die Kosten für beide Anpassungsarten oberhalb der Normalkapazität miteinander konkurrieren.

Um einen optimalen Produktionsplan aufstellen zu können, muß jedoch gewährleistet sein, daß jede ME mit den jeweils geringsten Grenzkosten hergestellt wird. Deshalb muß zunächst eine Entscheidung darüber getroffen werden, welche Anpassungsart für eine zusätzliche ME die geringsten Kosten verursacht.

Bei der in Abbildung 18 dargestellten Situation ist eine intensitätsmäßige Anpassung solange vorteilhafter, bis die Steigung der Kostenkurven für beide Anpassungsarten gleich groß wird. Dieser Punkt ergibt sich dadurch, daß eine Parallele zum Kostenverlauf für die Überstundenproduktion die Kostenkurve für die Intensitätssteigerung tangiert. Die zugeordnete Ausbringungsmenge wird hier mit x_{2j} bezeichnet. Reicht diese Menge nicht aus, um den Bedarf zu decken, dann müssen Überstunden eingelegt werden. Da der Anstieg der entsprechenden Kosten für jede weitere ME geringer ist als bei einer zusätzlichen intensitätsmäßigen Anpassung, muß die Produktion solange durch Überstunden ausgedehnt werden, bis die gesamte Überstundenkapazität erschöpft ist. Eine völlige Auslastung der Maschine bis zur Kapazitätsgrenze kann dann durch die noch mögliche Intensitätssteigerung erreicht werden. Damit ergibt sich z.B. für die in Abbildung 18 dargestellte Situation folgender Kostenverlauf:

Abbildung 19: Verlauf der variablen Produktionskosten in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge für das Aggregat j unter Einhaltung der jeweils kostengünstigsten Anpassungsart.



x_{1j} = Normalkapazität

$x_{3j} - x_{1j} = x_{6j} - x_{5j} + x_{2j} - x_{1j}$ = Intensitätssteigerungskapazität

$x_{4j} - x_{1j} = x_{5j} - x_{2j}$ = Überstundenkapazität

x_{6j} = Kapazitätsgrenze

Um die entsprechenden Kostenfunktionen für die einzelnen Aggregate bestimmen zu können, müssen zunächst die Grenzkosten errechnet werden, die sich bei intensitätsmäßiger Anpassung ergeben. Durch einen Vergleich mit den variablen Stückkosten der Überstundenproduktion kann dann für jede ME die kostengünstigste Anpassungsart angegeben werden.

In Tabelle 22 wird für sämtliche Aggregate die jeweils vorteilhafteste Produktionsalternative in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge dargestellt. Werden z.B. auf der ersten Maschine weniger als 480 ME hergestellt, so ist eine zeitliche Anpassung (ohne Überstunden) erforderlich. Für 481 bis 499 ME muß eine Intensitätssteigerung vorgenommen werden. Liegt die Produktionsmenge zwischen 500 und 619 ME, dann müssen außerdem Überstunden eingelegt werden. Eine größere Ausbringungsmenge läßt sich nur noch durch eine zusätzliche intensitätsmäßige Anpassung erreichen.

Kumuliert man die errechneten Grenzkosten, dann können für jede beliebige Produktionsmenge eines Aggregates die jeweils niedrigsten variablen Herstellungskosten bestimmt werden. Diese Ergebnisse werden für die eigentliche Optimierungsarbeit benötigt.

5.1.2 Lösungsansatz und optimale Entscheidung

Das Ziel der Planung besteht darin, die verschiedenen Anlagen so einzusetzen, daß entsprechend den Absatzbedingungen der gesamte Gewinn maximiert wird. Da in dem vorliegenden Modell nur ein Produkt berücksichtigt wird, kann die Optimierung zunächst auf die Bestimmung

Tabelle 22: Optimale Aufteilung der einzelnen Anpassungsarten für die Maschinen 1 bis 6.

Maschine	1		2		3		4		5		6	
Anpassungsart	Produktionsmenge	K'	Produktionsmenge	K'	Produktionsmenge	K'	Produktionsmenge	K'	Produktionsmenge	K'	Produktionsmenge	K'
zeitliche Anpassung ohne Überstunden	1 bis 480	78,00	1 bis 400	86,40	1 bis 400	79,20	1 bis 320	78,00	1 bis 240	88,00	1 bis 240	80,00
intensitätsmäßige Anpassung	481	78,03	401	86,41	401	79,22	321	78,03	241	93,04		
	482	78,12	402	86,44	402	79,28	322	78,12	242	93,16		
	483	78,27	403	86,49	403	79,38	323	78,27				
	484	78,48	404	86,56	404	79,58	324	78,48				
	485	78,75	405	86,65	405	79,70	325	78,75				
	486	79,08	406	86,76	406	79,92	326	79,08				
	487	79,47	407	86,89	407	80,18	327	79,47				
	488	79,92	408	87,04	408	80,48	328	79,92				
	489	80,43	409	87,21	409	80,82	329	80,43				
	490	81,00	410	87,40	410	81,20	330	81,00				
	491	81,63	411	87,61	411	81,62	331	81,63				
	492	82,32	412	87,84	412	82,08	332	82,32				
	493	83,07	413	88,09	413	82,58	333	83,07				
	494	83,88	414	88,36	414	83,12	334	83,98				
	495	84,75	415	88,65	415	83,70						
	496	85,68	416	88,96	416	84,32						
	497	86,67	417	89,29	417	84,98						
	498	87,72	418	89,64	418	85,68						
	499	88,83	419	90,01	419	86,42						
			420	90,40								
			421	90,81								
			422	91,24								
			423	91,69								
			424	92,16								
			425	92,65								
			426	93,16								
			427	93,69								
			428	94,24								
			429	94,81								
zeitliche Anpassung durch Überstunden	500 bis 619	89,70	430 bis 529	95,04	420 bis 519	87,12	335 bis 414	84,24	243 bis 302	93,28	241 bis 300	84,80
intensitätsmäßige Anpassung	620	90,00	530	95,40	520	87,20	415	84,75	303	93,36		
	621	91,23	531	96,01	521	88,02	416	85,68	304	93,64		
	622	92,52	532	96,64	522	88,88	417	86,67	305	94,00		
	623	93,87			523	89,78	418	87,72	306	94,44		
	624	95,28			524	90,72	419	88,83	307	94,96		
							420	90,00	308	95,56		
							421	91,23	309	96,24		
							422	92,52	310	97,00		
							423	93,87	311	97,84		
							424	95,28	312	98,76		
							425	96,75				
							426	98,28				
							427	99,87				
							428	101,52				
							429	103,23				
							430	105,00				
							431	106,83				
							432	108,72				

der minimalen variablen Kosten beschränkt werden. Zu Beginn der Planung ist die erforderliche Produktionsmenge noch unbekannt, so daß für jede theoretisch mögliche Ausbringungsmenge (X) der kostengünstigste Einsatz sämtlicher Maschinen festgelegt werden muß.

Dieses Problem kann mit Hilfe der dynamischen Programmierung gelöst werden. Die Berechnung erfolgt hier vorwärtsschreitend, wobei in jedem Iterationsschritt ein weiteres Aggregat in die Betrachtung einbezogen wird. Im ersten Planungsschritt muß in Abhängigkeit von der gesamten Ausbringungsmenge die kostengünstigste Beanspruchung der ersten beiden Anlagen ermittelt werden. Die entsprechenden Produktionsmengen der einzelnen Maschinen ergeben sich dadurch, daß für jeden möglichen Wert von X die variablen Herstellungskosten der verschiedenen Produktionsalternativen errechnet werden und anschließend das Kostenminimum ausgewählt wird.

Dieses Iterationsverfahren soll an einem vereinfachten Zahlenbeispiel verdeutlicht werden. Für die ersten beiden Aggregate werden die in Tabelle 23 dargestellten variablen Herstellungskosten angenommen.

Tabelle 23: Variable Produktionskosten in Abhängigkeit von der Fertigungsmenge für die Maschinen 1 und 2.

Produktionsmenge	variable Produktionskosten in DM für die Maschine	
	1	2
1	70	80
2	155	160
3	245	240

Wird nur eine ME hergestellt (X = 1), dann ergeben sich 2 Produktionsalternativen, da die Fertigung sowohl auf der ersten als auch auf der zweiten Maschine vorgenommen werden kann. Ein Vergleich der variablen Herstellungskosten zeigt, daß die Produktion auf der ersten Anlage vorteilhafter ist (= 70 DM).

Bei einer Ausbringungsmenge von X = 2 existieren 3 Produktionsmöglichkeiten. Die verschiedenen Kombinationen

und die entsprechenden variablen Herstellungskosten werden in Tabelle 24 aufgeführt.

Tabelle 24: Bestimmung der minimalen variablen Produktionskosten für X = 2.

Produktionsmenge auf der Maschine:		variable Produktionskosten in DM für die Maschine:		Summe der variablen Produktionskosten in DM:
1	2	1	2	
2	0	155	0	155
1	1	70	80	150
0	2	0	160	160

Von diesen Fertigungsalternativen muß wieder diejenige ausgewählt werden, bei der die Summe der variablen Produktionskosten am geringsten ist. Aus der Tabelle 24 ergibt sich das Kostenminimum mit 150 DM bei einer Produktionsmenge von 1 ME pro Aggregat.

Für X = 3 treten 4 verschiedene Kombinationsmöglichkeiten auf:

Tabelle 25: Bestimmung der minimalen variablen Produktionskosten für X = 3.

Produktionsmenge auf der Maschine:		variable Produktionskosten in DM für die Maschine:		Summe der variablen Produktionskosten in DM:
1	2	1	2	
3	0	245	0	245
2	1	155	80	235
1	2	70	160	230
0	3	0	240	240

Die kostenminimale Fertigung verursacht 230 DM Produktionskosten, wobei 1 ME auf der ersten Anlage und 2 ME auf der zweiten Anlage hergestellt werden müssen.

In gleicher Weise wird für jede mögliche Ausbringungsmenge die optimale Produktionsmengenaufteilung bestimmt. - Der größte Wert von X ergibt sich durch die Summe der Kapazitäten der ersten beiden Maschinen.

Im zweiten Iterationsschritt wird die Optimierung für 3 Aggregate vorgenommen. Unter Berücksichtigung der im vorhergehenden Planungsschritt ermittelten minimalen variablen Herstellungskosten muß wieder in Abhängigkeit von der gesamten Ausbringungsmenge die kostengünstigste Beanspruchung der Maschinen festgestellt werden. In Tabelle 26 sind die bereits bekannten optimalen Werte für die ersten beiden Produktiveinheiten und die hier unterstellten variablen Herstellungskosten für die dritte Maschine angegeben.

Tabelle 26: Minimale variable Produktionskosten der ersten beiden Anlagen und variable Produktionskosten der dritten Anlage in Abhängigkeit von X.

Produktionsmenge:	minimale variable Produktionskosten in DM für die Maschinen:	variable Produktionskosten in DM für die Maschine:
	1 und 2	3
1	70	75
2	150	160
3	230	235

Die entsprechenden Kostenminima werden in gleicher Weise ermittelt wie im ersten Iterationsschritt. Für X = 1 ergeben sich z.B. 2 Produktionsmöglichkeiten, von denen wieder die vorteilhafteste ausgewählt werden muß. Die Fertigung kann entweder nach der bereits vorliegenden optimalen Entscheidung auf einer der ersten beiden Anlagen erfolgen oder auf der dritten Maschine vorgenommen werden. Ein Vergleich der variablen Herstellungskosten zeigt, daß die erste Produktionsalternative die geringsten Kosten (= 70 DM) verursacht. Aufgrund der Ergebnisse des vorhergehenden Planungsschrittes steht damit auch fest, welche von den ersten beiden Produktiveinheiten eingesetzt werden muß. Aus Tabelle 23 geht hervor, daß die Fertigung auf der Maschine 1 die niedrigsten Kosten verursacht.

Bei einer Gesamterzeugung von 2 ME betragen die variablen Herstellungskosten für die optimale Produktionsmengenaufteilung 70 DM + 75 DM = 145 DM. Dementspre-

chend entfällt 1 ME auf die ersten beiden Anlagen und die zweite ME auf die dritte Anlage. Für die kostenminimale Auslastung der Maschinen 1 und 2 gilt auch hier die optimale Bedingung, die im ersten Planungsschritt ermittelt wurde.

Werden 3 ME hergestellt, dann ergeben sich für die günstigste Produktionsalternative 150 DM + 75 DM = 225 DM variable Herstellungskosten, wobei 2 ME auf den ersten beiden Anlagen und 1 ME auf der dritten Anlage gefertigt werden müssen. Der optimale Einsatz der ersten beiden Maschinen geht aus den Ergebnissen des vorhergehenden Iterationsschrittes hervor: Für X = 2 wurde das Kostenminimum bei einer Produktionsmenge von 1 ME pro Aggregat ermittelt.[1)]

Mit diesen Ausführungen wird deutlich, daß für jeden nachfolgenden Planungsschritt die niedrigsten variablen Herstellungskosten in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge bestimmt werden müssen. Darüber hinaus benötigt man aber auch die zugehörigen Fertigungsmengen, um anschließend in entgegengesetzter Richtung zum Optimierungsverfahren die kostenminimale Produktionsmengenaufteilung vornehmen zu können. Da die Kostenminima und die entsprechenden Produktionsmengen durch die gesamte Ausbringungsmenge eindeutig determiniert sind, können beide Größen aus Gründen der Übersichtlichkeit getrennt tabelliert werden. In der ersten Tabelle werden die minimalen variablen Herstellungskosten für jeden Wert von X angegeben, und in der zweiten Tabelle werden die zugehörigen optimalen Produktionsmengen - ebenfalls in Abhängigkeit von X - aufgeführt.[2)]

Das oben beschriebene Optimierungsverfahren muß schrittweise solange fortgesetzt werden, bis sämtliche Aggregate erfaßt sind. Um eine allgemeingültige Ziel-

---

1) Vgl. S. 122
2) Vgl. die Tabellen 27 und 28, S. 127 u. 129

bedingung für die Bestimmung der minimalen variablen Herstellungskosten aufstellen zu können, werden folgende Symbole eingeführt: Mit x_j wird die Produktionsmenge angegeben, die auf der Maschine j hergestellt wird. Die entsprechenden Herstellungskosten - unter Berücksichtigung der jeweils kostengünstigsten Anpassungsart[1] - werden durch $K_p(x_j)$ charakterisiert. Bezeichnet man die minimalen variablen Kosten für die Aggregate 1 bis j mit F_j, dann ergeben sich die relativen Optima in Abhängigkeit von der gesamten Ausbringungsmenge (X) aus der Bedingung:

$$(51.1) \qquad F_j(X) = \min_{x_j} \left[K_p(x_j) + F_{j-1}(X - x_j) \right]$$

$F_{j-1}(X-x_j)$ gibt dabei die minimalen variablen Produktionskosten für die Menge $X-x_j$ auf den Maschinen 1 bis j-1 an, die aus der vorhergehenden Planungsstufe bekannt sind.

In jedem Iterationsschritt treten also zwei Variable auf, einerseits die Produktionsmenge des jeweils letzten Aggregates und andererseits die gesamte Ausbringungsmenge. Für jeden Wert von X, der nicht größer ist als die maximale Herstellungsmenge des Aggregates j ($\max x_j$), ergeben sich die Grenzen für x_j aus der Beziehung

$$(51.2) \qquad 0 \leq x_j \leq X$$

Gilt $X > \max x_j$, dann wird der zulässige Bereich von x_j durch

$$(51.3) \qquad 0 \leq x_j \leq \max x_j$$

bestimmt. Für die Ungleichungen (51.2) und (51.3) kann auch der Ausdruck

$$(51.4) \qquad 0 \leq x_j \leq \min \left(X, \max x_j \right)$$

geschrieben werden. Innerhalb dieser Grenzen muß also

---

1) Vgl. Abschnitt 5.1.1, S.113ff.

x_j für jeden möglichen Wert von X variiert werden, um die kostenminimalen Produktionsalternativen bestimmen zu können.

Für die gesamte Ausbringungsmenge liegt der untere Randwert mit 1 ME fest, während der obere Randwert von Stufe zu Stufe variiert. Der größte Wert für X ergibt sich aus der Summe der Kapazitäten sämtlicher bisher betrachteter Aggregate, so daß die maximale Ausbringungsmenge - und damit auch die Zahl der relativen Optima - in jedem weiteren Iterationsschritt durch die Kapazität der neu hinzukommenden Produktiveinheit vergrößert wird.

Unter Berücksichtigung dieser Nebenbedingungen wurde die Optimierung entsprechend der Zielfunktion (51.1) für die in Tabelle 22[1] angegebenen Grenzkosten der Produktion auf einem Elektronenrechner durchgeführt. Die Minimierung erfolgte für jeweils 10 ME, um den Rechenaufwand möglichst niedrig zu halten. Dadurch können die Ergebnisse geringfügig von der tatsächlich realisierbaren kostenminimalen Produktionsmengenaufteilung abweichen, was bei einer genauen Berechnung natürlich nicht möglich ist.

In den Spalten 2,3,5,7,9 und 11 der Tabelle 27[2] sind die variablen Produktionskosten der einzelnen Aggregate aufgeführt, die sich durch Kumulation der bereits bekannten Grenzkosten[3] ergeben. Die Spalten 4,6,8,10 und 12 enthalten die minimalen variablen Kosten, die durch die Optimierung ermittelt wurden. So stellen z.B. die Kostenminima der dritten Spalte die Ergebnisse des

---

1) Vgl. S. 120
2) Die in Tabelle 27 angegebenen variablen Herstellungskosten weichen verschiedentlich um 1 Pfennig von den tatsächlichen Kosten ab. Diese Differenzen sind maschinenbedingt. Sie könnten dadurch vermieden werden, daß für jeden Wert ein größerer Speicherplatz auf dem Elektronenrechner zur Verfügung gestellt würde.
3) Vgl. Tabelle 22, S. 120

Tabelle 27: Bestimmung der minimalen variablen Herstellungskosten in Abhängigkeit von X für 6 verschiedene Aggregate.

Maschine / Menge	1	2	1 bis 2	3	1 bis 3	4	1 bis 4	5	1 bis 5	6	1 bis 6
	Kv	Kv	Minimum der Kv	Kv	Minimum der Kv	Kv	Minimum der Kv	Kv	Minimum der Kv	Kv	Minimum der Kv
10	780,00	864,00	780,00	792,00	780,00	780,00	780,00	880,00	780,00	800,00	780,00
40	3120,00	3456,00	3120,00	3168,00	3120,00	3120,00	3120,00	3520,00	3120,00	3200,00	3120,00
50	3900,00	4320,00	3900,00	3960,00	3900,00	3900,00	3900,00	4400,00	3900,00	4000,00	3900,00
100	7800,00	8640,00	7800,00	7920,00	7800,00	7800,00	7800,00	8800,00	7800,00	8000,00	7800,00
150	11700,00	12960,00	11700,00	11880,00	11700,00	11700,00	11700,00	13200,00	11700,00	12000,00	11700,00
200	15600,00	17280,00	15600,00	15840,00	15600,00	15600,00	15600,00	17600,00	15600,00	16000,00	15600,00
250	19500,00	21600,00	19500,00	19800,00	19500,00	19500,00	19500,00	22052,44	19500,00	20048,00	19500,00
300	23400,00	25920,00	23400,00	23760,00	23400,00	23400,00	23400,00	26716,43	23400,00	24288,00	23400,00
330	25740,00	28512,00	25740,00	26136,00	25740,00	25751,54	25740,00		25740,00		25740,00
340	26520,00	29376,00	26520,00	26928,00	26520,00	26587,88	26520,00		26520,00		26520,00
350	27300,00	30240,00	27300,00	27720,00	27300,00	27430,28	27300,00		27300,00		27300,00
360	28080,00	31104,00	28080,00	28512,00	28080,00	28272,68	28080,00		28080,00		28080,00
400	31200,00	34560,00	31200,00	31680,00	31200,00	31642,28	31200,00		31200,00		31200,00
410	31980,00	35427,84	31980,00	32479,69	31980,00	32484,68	31980,00		31980,00		31980,00
420	32760,00	36316,69	32760,00	33321,31	32760,00	33345,29	32760,00		32760,00		32760,00
450	35100,00	39146,98	35100,00	35934,91	35100,00		35100,00		35100,00		35100,00
490	38231,54	42948,58	38231,54	39419,71	38231,54		38219,99		38219,99		38219,99
500	39085,79	43898,97	39085,79	40290,91	39023,54		38999,99		38999,99		38999,99
550	43570,79		43405,79		42983,54		42899,99		42899,99		42899,99
600	48055,79		47725,79		46943,54		46799,99		46794,99		46799,99
650			52045,79		50903,54		50699,99		50699,99		50699,99
700			56365,79		54863,54		54599,99		54599,99		54599,99
750			60685,79		58823,54		58499,98		58499,98		58499,98
800			65005,79		62783,54		62399,98		62399,98		62399,98
850			69325,78		66743,54		66359,08		66359,08		66359,08
900			73645,78		70711,23		70319,08		70319,08		70319,08
950			78093,48		74999,10		74279,08		74279,08		74279,08
1000			82578,48		79319,10		78239,08		78239,08		78239,08
1050			87096,27		83639,10		82199,08		82199,08		82199,08
1100			91848,26		87959,10		86159,08		86159,08		86159,08
1150			96600,62		92279,10		90119,08		90119,08		90119,08
1200					96599,10		94079,08		94079,08		94079,08
1250					100919,10		98140,73		98140,73		98062,77
1300					105239,10		102352,73		102352,73		102062,77
1350					109577,34		106616,39		106616,39		106062,77
1400					113933,34		110936,39		110936,39		110062,77
1450					118332,87		115256,39		115256,39		114062,77
1500					122817,87		119576,39		119576,39		118183,13
1550					127302,86		123896,39		123896,39		122395,13
1600					131980,85		128216,38		128216,38		126629,53
1650					136732,85		132536,38		132536,38		130904,39
1700							136856,38		136856,38		135224,39
1750							141180,23		141180,23		139544,39
1800							145536,23		145536,23		143864,38
1850							149892,31		149892,31		148184,38
1900							154369,15		154292,30		152504,38
1950							158854,15		158692,30		156824,38
2000							163425,44		163092,30		161144,38

ersten Iterationsschrittes dar, in dem aufgrund der variablen Fertigungskosten der ersten beiden Maschinen (Spalte 1 und 2) die optimale Produktionsmengenaufteilung vorgenommen wurde. Unter Berücksichtigung dieser minimalen Kosten und der variablen Herstellungskosten für die dritte Maschine (Spalte 5) ergeben sich dann im zweiten Iterationsschritt die relativen Optima der Spalte 6. In der letzten Spalte stehen die niedrigsten Produktionskosten, die bei einem optimalen Einsatz sämtlicher Aggregate verursacht werden.

In der Tabelle 28 sind die zugehörigen optimalen Produktionsmengen aufgeführt. Aus den Spalten 2 und 3 ergibt sich z.B. der kostenminimale Einsatz für die ersten beiden Aggregate. Die Ergebnisse des zweiten Planungsschrittes werden dementsprechend durch die Werte der Spalten 4 und 5 wiedergegeben. In gleicher Weise sind die relativen Optima der übrigen Iterationsschritte in den darauffolgenden Spalten dargestellt.

Da die Werte der Tabellen 27 und 28 in Abhängigkeit von der gesamten Ausbringungsmenge angegeben sind, kann für jede beliebige optimale Produktionsmengenaufteilung das zugehörige Kostenminimum in der Tabelle 27 aufgesucht werden. Bei einer Produktion von insgesamt 10 ME ergab die Optimierung z.B. im ersten Iterationsschritt 10 ME für die Anlage 1 und 0 ME für die Anlage 2.[1] Die entsprechenden minimalen variablen Herstellungskosten des ersten Planungsschrittes sind - wie bereits oben erläutert wurde - in der Spalte 4 der Tabelle 23 aufgeführt und der jeweiligen Ausbringungsmenge zugeordnet. Demzufolge ergibt sich für X = 10 das gesuchte Kostenminimum aus der ersten Zeile der Spalte 4 (= 780 DM). Ebenso könnten für jeden Wert der Tabelle 27 die zugehörigen optimalen Produktionsmengen in der Tabelle 28 ermittelt werden.

---

1) Vgl. Zeile 1 der Spalten 1,2 und 3 in der Tabelle 28

Tabelle 28: Bestimmung des optimalen Einsatzes für 6 verschiedene Aggregate bei einer Gesamterzeugung von 1800 ME.

Menge	Optimale Produktionsmengen der Maschinen									
	1	2	1 bis 2	3	1 bis 3	4	1 bis 4	5	1 bis 5	6
10	10	0	10	0	10	0	10	0	10	0
40	40	0	40	0	40	0	40	0	40	0
50	50	0	50	0	50	0	50	0	50	0
100	100	0	100	0	100	0	100	0	100	0
150	150	0	150	0	150	0	150	0	150	0
200	200	0	200	0	200	0	200	0	200	0
250	250	0	250	0	250	0	250	0	250	0
300	300	0	300	0	300	0	300	0	300	0
330	330	0	330	0	330	0	330	0	330	0
340	340	0	340	0	20	320	340	0	340	0
350	350	0	350	0	40	310	350	0	350	0
360	360	0	360	0	60	300	360	0	360	0
400	400	0	400	0	140	260	400	0	400	0
410	410	0	410	0	160	250	410	0	410	0
420	420	0	420	0	180	240	420	0	420	0
450	450	0	450	0	240	210	450	0	450	0
490	490	0	490	0	320	170	490	0	490	0
500	500	0	490	10	340	160	500	0	500	0
540	500	40	490	50	420	120	540	0	540	0
550	500	50	490	60	440	110	550	0	550	0
600	500	100	490	110	480	120	600	0	600	0
650	500	150	490	160	480	170	650	0	650	0
660	500	160	490	170	480	180	660	0	660	0
700	500	200	490	210	480	220	700	0	700	0
750	500	250	490	260	480	270	750	0	750	0
800	500	300	490	310	480	320	800	0	800	0
850	500	350	490	360	520	330	850	0	850	0
900	500	400	490	410	570	330	900	0	900	0
950	530	420	530	420	620	330	950	0	950	0
960	540	420	540	420	630	330	960	0	960	0
1000	580	420	580	420	670	330	1000	0	1000	0
1050	620	430	630	420	720	330	1050	0	1050	0
1080	620	460	660	420	750	330	1080	0	1080	0
1100	620	480	680	420	770	330	1100	0	1100	0
1150	620	530	730	420	820	330	1150	0	1150	0
1200			780	420	870	330	1200	0	1200	0
1250			830	420	910	340	1250	0	1230	20
1300			880	420	910	390	1300	0	1230	70
1350			910	440	930	420	1350	0	1230	120
1380			910	470	960	420	1380	0	1230	150
1400			910	490	980	420	1400	0	1230	170
1450			930	520	1030	420	1450	0	1230	220
1500			980	520	1080	420	1500	0	1260	240
1550			1030	520	1130	420	1550	0	1310	240
1600			1080	520	1180	420	1600	0	1320	280
1650			1130	520	1230	420	1650	0	1350	300
1680					1260	420	1680	0	1380	300
1700					1280	420	1700	0	1400	300
1750					1330	420	1750	0	1450	300
1800					1380	420	1800	0	1500	300
1850					1430	420	1850	0	1550	300
1900					1480	420	1850	50	1600	300
1950					1530	420	1850	100	1650	300
2000					1580	420	1850	150	1700	300

In dem vorliegenden Modell wurde die Optimierung nur bis zu einer maximalen Ausbringungsmenge von 2000 ME durchgeführt. Dieser Beschränkung liegt die Annahme zugrunde, daß eine darüber hinausgehende Nachfrage nicht auftreten kann. Besteht jedoch die Möglichkeit, daß der Bedarf 2000 ME übersteigt, dann muß auch die Optimierung - evtl. bis zur völligen Auslastung sämtlicher Aggregate - ausgedehnt werden. Die größte realisierbare Produktionsmenge liegt in diesem Beispiel bei 2724 ME.

Eine optimale Entscheidung über die Höhe der gesamten Ausbringungsmenge hängt wesentlich von den absatzpolitisch bedingten Einflußfaktoren ab. So kann der Absatzplan z.B. aufgrund von Lieferverträgen die herzustellende Menge bereits eindeutig vorgeben. Für die Produktionsplanung verbleibt dann nur die Aufgabe, entsprechend der ermittelten optimalen Werte die kostenminimale Produktionsmengenaufteilung vorzunehmen.

Die Lösung ergibt sich dadurch, daß in entgegengesetzter Richtung zum Optimierungsverfahren der Einsatz der einzelnen Aggregate in der Tabelle 28 festgestellt wird. Benötigt man z.B. 1800 ME, dann müssen zunächst die optimalen Werte ermittelt werden, die im letzten Iterationsschritt für diese Ausbringungsmenge berechnet wurden. Dabei ergaben sich in dem vorliegenden Beispiel 300 ME für die sechste Anlage und 1500 ME für die ersten fünf Anlagen. Anschließend werden für X = 1500 ME die Ergebnisse des vierten Iterationsschrittes aufgesucht, die in den beiden vorhergehenden Spalten angegeben sind. Daraus folgt, daß eine Produktion auf der fünften Maschine nicht vorteilhaft ist, so daß wieder für X = 1500 ME die optimalen Werte des dritten Planungsschrittes ausgewählt werden müssen. Dementsprechend ergeben sich dann 420 ME für die vierte Anlage und 1080 ME für die ersten drei Aggregate. Bei einer Produktion von 1080 ME besagt die optimale Entscheidung des zweiten Iterationsschrittes, daß 420 ME auf der dritten Maschine und 660 ME auf den ersten beiden Maschinen hergestellt werden müssen. Für X = 660 ME wird schließlich durch die

Ergebnisse des ersten Planungsschrittes die Produktionsmenge der zweiten Anlage mit 160 ME und die der ersten Anlage mit 500 ME festgesetzt.

Damit sind die optimalen Fertigungsmengen für sämtliche Aggregate bei einer Gesamterzeugung von 1800 ME eindeutig determiniert. Der beschriebene Ablauf zur Bestimmung der kostenminimalen Produktionsmengenaufteilung ist in der Tabelle 28 durch einen Pfeil besonders gekennzeichnet.

Für die ermittelten Fertigungsmengen muß anschließend festgestellt werden, welche Anpassungsarten bei den einzelnen Aggregaten vorgenommen werden müssen. Aus der Tabelle 22[1)] ergibt sich für die vorliegenden Werte folgende Aufteilung:

Tabelle 29: Darstellung der bei einer Gesamterzeugung von 1800 ME geltenden kostengünstigsten Anpassungsarten für die Aggregate 1 bis 6.

Produktionsmenge der Maschine / Anpassungsart	1	2	3	4	5	6
zeitliche Anpassung ohne Überstunden	480	160	400	320	0	240
zeitliche Anpassung durch Überstunden	1	0	1	80	0	60
intensitätsmäßige Anpassung	19	0	19	20	0	0
optimale Produktionsmenge	500	160	420	420	0	300

Damit wird deutlich, daß in diesem Modell zeitliche intensitätsmäßige und quantitative Anpassungen simultan berücksichtigt werden können.

Wird die Produktionsmenge nicht bereits durch den Absatzplan festgelegt, dann kann eine optimale Entscheidung über die Höhe der Gesamterzeugung nur unter Berücksichtigung der Absatzpreise erfolgen. Bei einer konstanten Ausbringungsmenge kann die Planungsabteilung lediglich die kostenminimale Produktionsmengenaufteilung ermitteln, die nicht notwendigerweise mit einer

1) Vgl. S. 120

Gewinnmaximierung identisch ist. Läßt sich dagegen die gesamte Fertigungsmenge variieren, dann besteht die Möglichkeit, die gewinnmaximale Lösung zu realisieren. Wie bereits in Abschnitt 2.2.2[1] erläutert wurde, wird dann der größtmögliche Gewinn verwirklicht, wenn auch der Deckungsbeitrag sein Maximum erreicht. Um dieses Planungsziel erfüllen zu können, muß also die Differenz zwischen dem Erlös und den variablen Kosten maximiert werden. Unter Beibehaltung der Symbolik werden die entsprechenden minimalen variablen Kosten für sämtliche Aggregate durch $F_j(x)$ angegeben, wobei j in diesem Modell den Wert 6 annimmt. Die entsprechende Zielfunktion lautet dann:

$$(51.5) \qquad DB(X) = \text{Max} \left[E(X) - F_j(X) \right]$$

Der Erlös ergibt sich aus dem Produkt von Menge und Preis, wobei zwei wesensverschiedene Situationen berücksichtigt werden müssen. Der Preis kann sowohl konstant als auch variabel sein. Im ersten Falle geht die Gleichung (51.5) in

$$(51.6) \qquad DB(X) = \text{Max} \left[P \cdot X - F_j(X) \right]$$

über. Hängt der Preis von der Höhe der Ausbringungsmenge ab, dann lautet die entsprechende Zielfunktion:

$$(51.7) \qquad DB(X) = \text{Max} \left[P(X) \cdot X - F_j(X) \right]$$

Die gewinnmaximale Lösung kann dadurch bestimmt werden, daß man zunächst für jede realisierbare Ausbringungsmenge den Deckungsbeitrag ermittelt und anschließend den größten Wert auswählt. In der Tabelle 30 sind die Deckungsbeiträge in Abhängigkeit von der Produktionsmenge für einen Preis von 85,- DM und einer Preisabsatzfunktion von der Form $P(X) = 120 - 0{,}01\ X$ angegeben.

---

1) Vgl. S. 13 ff.

Tabelle 30: Bestimmung der gewinnmaximalen Produktionsmenge für P = 85,- DM und P(X) = 120 - 0,01X.

Menge	variable Kosten	P=85,00	Erlös für P=85,00	Deckungsbeitrag für P=85,00	P(x)= 120-0,01x	Erlös für P(x)=120-0,01x	Deckungsbeitrag für P(x)=120-0,01x
10	780,00	85,00	850,00	70,00	119,90	1199,00	419,00
50	3900,00	85,00	4250,00	350,00	119,50	5975,00	2075,00
100	7800,00	85,00	8500,00	700,00	119,00	11900,00	4100,00
150	11700,00	85,00	12750,00	1050,00	118,50	17775,00	6075,00
200	15600,00	85,00	17000,00	1400,00	118,00	23600,00	8000,00
250	19500,00	85,00	21250,00	1750,00	117,50	29375,00	9875,00
300	23400,00	85,00	25500,00	2100,00	117,00	35100,00	11700,00
350	27299,99	85,00	29750,00	2450,01	116,50	40775,00	13475,01
400	31199,99	85,00	34000,00	2800,01	116,00	46400,00	15200,01
450	35099,99	85,00	38250,00	3150,01	115,50	51975,00	16875,01
500	38999,99	85,00	42500,00	3500,01	115,00	57500,00	18500,01
550	42899,99	85,00	46750,00	3850,01	114,50	62975,00	20075,01
600	46799,99	85,00	51000,00	4200,01	114,00	68400,00	21600,01
650	50699,99	85,00	55250,00	4550,01	113,50	73775,00	23075,01
700	54599,99	85,00	59500,00	4900,01	113,00	79100,00	24500,01
750	58499,98	85,00	63750,00	5250,02	112,50	84375,00	25875,02
800	62399,98	85,00	68000,00	5600,02	112,00	89600,00	27200,02
850	66359,08	85,00	72250,00	5890,92	111,50	94775,00	28415,92
900	70319,08	85,00	76500,00	6180,92	111,00	99900,00	29580,92
950	74279,98	85,00	80750,00	6470,92	110,50	104975,00	30695,92
1000	78239,08	85,00	85000,00	6760,92	110,00	110000,00	31760,92
1050	82199,08	85,00	89250,00	7050,92	109,50	114975,00	32775,92
1100	86159,08	85,00	93500,00	7340,92	109,00	119900,00	33740,92
1150	90119,08	85,00	97750,00	7630,92	108,50	124775,00	34655,92
1200	94079,08	85,00	102000,00	7920,92	108,00	129600,00	35520,92
1250	98062,77	85,00	106250,00	8187,22	107,50	134375,00	36312,22
1300	102062,77	85,00	110500,00	8437,22	107,00	139100,00	37037,22
1350	106062,77	85,00	114750,00	8687,22	106,50	143775,00	37712,22
1400	110062,77	85,00	119000,00	8937,22	106,00	148400,00	38337,22
1450	114062,77	85,00	123250,00	9187,22	105,50	152975,00	38912,22
1500	118183,13	85,00	127500,00	9316,86	105,00	157500,00	39316,86
1550	122395,13	85,00	131750,00	9354,87	104,50	161975,00	39579,87
1600	126629,53	85,00	136000,00	9370,47	104,00	166400,00	39770,47
1620	128325,53	85,00	137700,00	9374,47	103,80	168156,00	39830,47
1650	130904,39	85,00	140250,00	9345,61	103,50	170775,00	39870,61
1680	133496,39	85,00	142800,00	9303,61	103,20	173376,00	39879,61
1700	135224,39	85,00	144500,00	9275,61	103,00	175100,00	39875,61
1750	139544,39	85,00	148750,00	9205,61	102,50	179375,00	39830,61
1800	143864,38	85,00	153000,00	9135,61	102,00	183600,00	39735,61
1850	148184,38	85,00	157250,00	9065,61	101,50	187775,00	39590,61
1900	152504,38	85,00	161500,00	8995,62	101,00	191900,00	39395,62
1950	156824,38	85,00	165750,00	8925,62	100,50	195975,00	39150,62
2000	161144,38	85,00	170000,00	8855,62	100,00	200000,00	38855,62

Für die Preisabsatzfunktion ergibt sich z.B. der maximale Deckungsbeitrag mit 39.879,61 DM bei einem Preis von 103,20 DM und einer Gesamterzeugung von 1680 ME. Für diese Ausbringungsmenge muß anschließend nach dem bereits oben erläuterten Verfahren[1] die optimale Produktionsmengenaufteilung anhand der Tabelle 28 vorgenommen werden. Die entsprechenden Ergebnisse sowie die gewinnmaximalen Lösungen für verschiedene andere Preise bzw. Preisabsatzfunktionen sind in der Tabelle 31 zusammengefaßt.

Tabelle 31: Darstellung der gewinnmaximalen Lösungen für verschiedene konstante Preise und Preisabsatzfunktionen.

konstante Preise bzw. Preisabsatzfunktionen	gewinnmaximaler Preis in DM	maximaler Deckungsbeitrag in DM	gewinnmaximale Produktionsmenge	optimale Produktionsmenge für die Maschine:					
				1	2	3	4	5	6
P=85,oo	85,oo	9374,47	162o	49o	o	42o	41o	o	3oo
P=9o,oo	9o,oo	18855,62	2ooo	5oo	36o	42o	42o	o	3oo
P=1oo,oo	1oo,oo	38855,62	2ooo	5oo	36o	42o	42o	o	3oo
P(x)=12o-o,o2x	99,6o	21768,92	1o2o	49o	o	2oo	33o	o	o
P(x)=12o-o,o1x	1o3,2o	39879,61	168o	5oo	4o	42o	42o	o	3oo

Die in diesem Modell unterstellte Linearität der Preisabsatzfunktionen ist jedoch keineswegs Voraussetzung für die Ermittlung des größten Deckungsbeitrages. Ebenso könnte für jede beliebige Preisentwicklung die gewinnmaximale Produktionsmengenaufteilung bestimmt werden.

Wie bereits bei der Optimierung deutlich wurde, sind auch die Kostenverläufe der einzelnen Aggregate nicht an eine bestimmte Form gebunden. Deshalb könnten z.B. in gleicher Weise die variablen Kosten für eine zweite oder dritte Schicht sowie Rüstkosten berücksichtigt werden.

---

1) Vgl. S. 130

Außerdem besteht die Möglichkeit, Ausschußfaktoren in die Planung einzubeziehen. Die aus der Vergangenheit bekannten unbrauchbaren ME einer Serie müssen dann in Prozent der hergestellten Produktionsmenge eines Aggregates angegeben werden, wobei der Prozentsatz auch für jede Anpassungsart unterschiedlich groß sein kann. Entsprechend dieser Ausschußquote werden die gesamten variablen Herstellungskosten auf die brauchbaren ME umgerechnet. Ergibt sich z.B. bei einer Produktion von 100 ME ein Ausschuß von 5 ME (= 5%) und betragen die variablen Kosten für jede hergestellte ME 95,- DM, dann müssen die Stückkosten der einwandfreien Produkte mit 100,- DM angesetzt werden. Für diese Kosten wird anschließend die optimale Produktionsmengenaufteilung nach dem oben erläuterten Iterationsverfahren ermittelt. Da die Optimierung nur für die brauchbaren ME durchgeführt wird, müssen die Kapazitäten der einzelnen Aggregate entsprechend der Ausschußquote korrigiert werden.

Unter Berücksichtigung der folgenden Ausschußfaktoren wurden für das vorliegende Modell die in Tabelle 32 angegebenen gewinnmaximalen Lösungen errechnet.

Maschine	1	2	3	4	5	6
Ausschuß	4%	1%	2%	3%	5%	0%

Tabelle 32: Darstellung der gewinnmaximalen Lösungen für verschiedene konstante Preise und Preisabsatzfunktionen unter Berücksichtigung von Ausschußfaktoren.

konstante Preise bzw. Preisabsatzfunktionen	gewinnmaximaler Preis in DM	maximaler Deckungsbeitrag in DM	gewinnmaximale Produktionsmenge	optimale Produktionsmenge für die Maschine:					
				1	2	3	4	5	6
P=85,00	85,00	60915,0	1500	470	0	410	320	0	300
P=90,00	90,00	14969,99	2000	480	410	410	400	0	300
P=100,00	100,00	34969,99	2000	480	410	410	400	0	300
P(x)=120-0,02x	100,60	19498,31	970	30	0	390	310	0	240
P(x)=120-0,01x	103,60	36317,91	1640	470	60	410	400	0	300

Die hier ermittelten Fertigungsmengen stellen nur die einwandfreien Produkte dar, so daß jede Produktiveinheit aufgrund der Fehlleistungen entsprechend mehr Erzeugnisse herstellen muß. Bei einem Ausschuß von z.B. 5% müßten auf dem betreffenden Aggregat etwa 5,5% der optimalen Menge zusätzlich produziert werden.

Ein anderer Vorteil dieses Modells besteht darin, daß die mit Hilfe der dynamischen Programmierung errechneten minimalen variablen Herstellungskosten für jede beliebige Absatzentwicklung eine optimale Entscheidung ermöglichen. Dadurch kann die Planungsarbeit in den nachfolgenden Zeitabschnitten unter bestimmten Voraussetzungen erheblich verringert werden. Handelt es sich z.B. um ein nicht lagerfähiges Produkt, dann müssen bei veränderten Absatzpreisen in der nächsten Periode lediglich die entsprechenden Erlöse neu berechnet werden, um den größten Deckungsbeitrag und die zugehörige gewinnmaximale Fertigungsmenge angeben zu können. Liegt die erforderliche Ausbringungsmenge bereits durch den Absatzplan fest, so kann die optimale Produktionsmengenaufteilung unmittelbar aufgrund der bekannten Kostenminima vorgenommen werden.

Bei lagerfähigen Erzeugnissen muß die Optimierung für sämtliche Perioden simultan durchgeführt werden. Unterstellt man, daß die gesamte Nachfrage der einzelnen Zeitabschnitte befriedigt werden soll, dann kann das Problem mit dem von Shephard und Elsner entwickelten Algorithmus[1)] gelöst werden. Dementsprechend müßten zunächst die gesamten variablen Kosten der verschiedenen Perioden angegeben werden, die sich in diesem Beispiel aus den bereits bekannten minimalen variablen Herstellungskosten und den jeweils geltenden Lagerhaltungskosten zusammensetzen. Mit diesen Werten können dann nach dem beschriebenen Iterationsverfahren die relativen Optima in Abhängigkeit vom Lagerbestand für

---

1) Vgl. die Ausführungen der Abschnitte 4.2.2 und 4.2.3, S. 61 ff. bzw. S. 89 ff.

jeden Zeitabschnitt errechnet werden. Die daraus resultierenden kostenminimalen Produktionsmengen der einzelnen Perioden müssen anschließend wieder nach den Ergebnissen des ersten Optimierungsverfahrens auf die verschiedenen Aggregate verteilt werden.

Mit diesen Ausführungen wird deutlich, daß durch zwei verschiedene Algorithmen der dynamischen Programmierung das oben diskutierte Modell auch als mehrperiodisches Planungsproblem formuliert werden kann.

Im folgenden Abschnitt wird die Optimierung mit Hilfe der dynamischen Programmierung für einen mehrstufigen Produktionsprozeß durchgeführt.

5.2 Zweites Modell: Einproduktbetrieb mit mehrstufiger Fertigung

5.2.1 Die Voraussetzungen des Modells

Der gesamte Planungszeitraum wird mit einem Monat festgelegt, wobei wieder 20 Arbeitstage mit je 8 Stunden Normalarbeitszeit angenommen werden. Darüber hinaus besteht auch hier die Möglichkeit, täglich zwei Überstunden einzulegen. Der wesentlichste Unterschied gegenüber dem ersten Modell ergibt sich dadurch, daß in diesem Beispiel ein mehrstufiger Produktionsprozeß unterstellt wird. Die Fertigung kann dabei nur in der festgesetzten Reihenfolge der Produktionsstufen vorgenommen werden. Eventuell auftretende Kosten für den Transport von einer Stufe zur anderen werden als unvermeidbar angesehen und bleiben deshalb bei der Optimierung unberücksichtigt. Das gleiche gilt für die Kosten der Lagerhaltung zwischen den einzelnen Stufen.[1)]
In diesem Modell wird ein dreistufiger Produktionsprozeß angenommen, wobei aus Gründen der Vereinfachung die im vorhergehenden Abschnitt aufgeführten Aggregate die erste Fertigungsstufe bilden. Für die zweite und dritte Bearbeitungsstufe werden hier 3 bzw. 4 verschiedene Maschinen angegeben. Die entsprechenden Werte für die einzelnen Aggregate der letzten beiden Produktionsstufen sind in der Tabelle 33 dargestellt.[2)]

---

1) In diesem Zusammenhang muß auf ein Problem aufmerksam gemacht werden, das in dem vorliegenden Modell nicht berücksichtigt wird. Treten z.B. in einer vorhergehenden Produktionsstufe längere Bearbeitungszeiten auf als in der nachfolgenden, dann müssen entsprechende Zwischenläger gebildet werden, um einen reibungslosen Ablauf gewährleisten zu können.
2) Für die erste Fertigungsstufe ergeben sich die Werte aus der Tabelle 21, S. 115

Tabelle 33: Übersicht über die für das herzustellende Produkt erforderlichen Angaben hinsichtlich der technischen Beschaffenheit der Maschinen in der zweiten und dritten Bearbeitungsstufe und der entsprechenden Kostenentwicklung.

Bearbeitungsstufe	Maschine	Bearbeitungszeit in Min. für 1 ME	Kv/Min. in DM	Kv/Std. in DM	Kv/Stück in DM	Anstieg der variablen Kosten bei Überstunden in %	Kv pro Überstunde in DM	Überstundenkapazität in Stück	Intensitätskapazität in Stück	Kostenfunktion für die Intensitätssteigerung	Normalkapazität in Stück	+ Überstundenkapazität in Stück	+ Intensitätskapazität in Stück
2	1	12	2,40	144,00	28,80	18	33,98	200	0	$0{,}0x^2+0{,}0$	800	1000	1000
	2	15	1,70	102,00	25,50	12	28,56	160	32	$0{,}03x^2+0{,}0$	640	800	832
	3	20	1,20	72,00	24,00	8	25,92	120	36	$0{,}01x^2+6{,}0$	480	600	636
3	1	20	1,10	66,00	22,00	16	25,52	120	36	$0{,}01x^2+0{,}0$	480	600	636
	2	24	0,90	54,00	21,60	10	23,76	100	20	$0{,}02x^2+0{,}0$	400	500	520
	3	30	0,80	48,00	24,00	12	26,88	80	0	$0{,}0x^2+0{,}0$	320	400	400
	4	30	0,75	45,00	22,50	10	24,75	80	32	$0{,}01x^2+2{,}5$	320	400	432

Analog zu dem in Abschnitt 5.1.1 beschriebenen Verfahren muß auch für diese Produktiveinheiten die kostengünstigste Anpassungsart für jede mögliche Fertigungsmenge bestimmt werden. Deshalb berechnet man zunächst wieder die Grenzkosten für alle ME, die durch eine Intensitätssteigerung hergestellt werden können. Ein Vergleich dieser Werte mit den variablen Stückkosten für die Überstundenproduktion ergibt dann die jeweils kostenminimale Produktionsalternative. In der Tabelle 34 sind die entsprechenden Ergebnisse für sämtliche Aggregate der letzten beiden Produktionsstufen zusammengefaßt.

Die ermittelten Grenzkosten müssen wieder kumuliert werden, um für jede mögliche Produktionsmenge der einzelnen Maschinen die niedrigsten variablen Herstellungskosten angeben zu können. Diese Kosten werden auch hier für die Optimierung mit Hilfe der dynamischen Programmierung benötigt.

5.2.2 Lösungsansatz und optimale Entscheidung

Für die Produktionsplanung ergibt sich die Aufgabe, die einzelnen Aggregate der verschiedenen Produktionsstufen so einzusetzen, daß aufgrund der Absatzbedingungen der maximale Gewinn realisiert wird. Die Optimierung kann zunächst wieder auf die Ermittlung der minimalen variablen Herstellungskosten beschränkt werden, da auch in diesem Modell nur ein Produkt berücksichtigt wird.

Wie bereits eingangs erwähnt wurde, werden für den Übergang von einer Bearbeitungsstufe zur anderen konstante Stückkosten für den Transport unterstellt, so daß es für die Bestimmung der optimalen Produktionsmengenaufteilung einer Fertigungsstufe gleichgültig ist, welche Aggregate in den übrigen Produktionsstufen

Tabelle 34: Optimale Aufteilung der Anpassungsarten für die Maschinen der zweiten und dritten Bearbeitungsstufe.

Bearbeitungsstufe	2						3							
Maschine	1		2		3		1		2		3		4	
Anpassungsart	Produktionsmenge	K'	Produktionsmenge	K'	Produktionsmenge	K'	Produktionsmenge	K'	Produktionsmenge	K'	Produktionsmenge	K'	Produktionsmenge	K'
zeitliche Anpassung ohne Überstunden	1 bis 800	28,80	1 bis 640	25,50	1 bis 480	24,00	1 bis 480	22,00	1 bis 400	21,60	1 bis 320	24,00	1 bis 320	22,50
intensitätsmäßige Anpassung			641	25,53			481	22,01	401	21,62				
			642	25,62			482	22,04	402	21,68				
			643	25,77			483	22,09	403	21,78				
			644	25,98			484	22,16	404	21,92				
			645	26,25			485	22,25	405	22,10				
			646	26,58			486	22,36	406	22,32				
			647	26,97			487	22,49	407	22,58				
			648	27,42			488	22,64	408	22,88				
			649	27,93			489	22,81	409	23,22				
			650	28,50			490	23,00	410	23,60				
							491	23,21						
							492	23,44						
							493	23,69						
							494	23,96						
							495	24,25						
							496	24,56						
							497	24,89						
							498	25,24						
zeitliche Anpassung durch Überstunden	801 bis 1000	33,98	651 bis 810	28,56	481 bis 600	25,92	499 bis 618	25,52	411 bis 510	23,76	321 bis 400	26,88	321 bis 400	24,75
intensitätsmäßige Anpassung			811	29,13	601	30,01	619	25,61	511	24,02			401	25,01
			812	29,82	602	30,04	620	26,00	512	24,48			402	25,04
			813	30,57	603	30,09	621	26,41	513	24,98			403	25,09
			814	31,38	604	30,16	622	26,84	514	25,52			404	25,16
			815	32,25	605	30,25	623	27,29	515	26,10			405	25,25
			816	33,18	606	30,36	624	27,76	516	26,72			406	25,36
			817	34,17	607	30,49	625	28,25	517	27,38			407	25,49
			818	35,22	608	30,64	626	28,76	518	28,08			408	25,64
			819	36,33	609	30,81	627	29,29	519	28,82			409	25,81
			820	37,50	610	31,00	628	29,84	520	29,60			410	26,00
			821	38,73	611	31,21	629	30,41					411	26,21
			822	40,02	612	31,44	630	31,00					412	26,44
			823	41,37	613	31,69	631	31,61					413	26,69
			824	42,78	614	31,96	632	32,24					414	26,96
			825	44,25	615	32,25	633	32,89					415	27,25
			826	45,78	616	32,56	634	33,56					416	27,56
			827	47,37	617	32,89	635	34,25					417	27,89
			828	49,02	618	33,24	636	34,96					418	28,24
			829	50,73	619	33,61							419	28,61
			830	52,50	620	34,00							420	29,00
			831	54,33	621	34,41							421	29,41
			832	56,22	622	34,84							422	29,84
					623	35,29							423	30,29
					624	35,76							424	30,76
					625	36,25							425	31,25
					626	36,76							426	31,76
					627	37,29							427	32,29
					628	37,84							428	32,84
					629	38,41							429	33,41
					630	39,00							430	34,00
					631	39,61							431	34,61
					632	40,24							432	35,24
					633	40,89								
					634	41,56								
					635	42,25								
					636	42,96								

eingesetzt werden. Das bedeutet, daß die Optimierung für jede Bearbeitungsstufe getrennt durchgeführt werden kann.

Die Berechnung erfolgt wieder mit Hilfe der dynamischen Programmierung, wobei in diesem Modell das in Abschnitt 5.1.2 erläuterte Iterationsverfahren für jede einzelne Stufe des Produktionsprozesses angewendet werden muß. Dementsprechend werden zunächst die minimalen variablen Herstellungskosten der ersten Fertigungsstufe ermittelt, indem für jede mögliche Ausbringungsmenge die optimale Produktionsmengenaufteilung schrittweise für 2, 3 usw. Maschinen festgelegt wird. Anschließend kann dann die gleiche Optimierung für die zweite und ebenso für die dritte Bearbeitungsstufe vorgenommen werden.

Damit ergeben sich die minimalen variablen Fertigungskosten in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge für j verschiedene Aggregate der Produktionsstufe i aus der Beziehung:

$$(52.1) \qquad F_{ij}(X) = \min_{x_{ij}} \left[K_p(x_{ij}) + F_{i,j-1}(X-x_{ij}) \right]$$

Die entsprechenden Kostenminima sowie die optimalen Produktionsmengen der ersten Fertigungsstufe sind bereits aus dem vorhergehenden Modell bekannt.[1] Für die Maschinen der letzten beiden Bearbeitungsstufen ergeben sich - bei einer Optimierung für jeweils 10 ME - aufgrund der oben ermittelten Grenzkosten die in Tabelle 35 aufgeführten minimalen variablen Herstellungskosten. In den Spalten 2,3,5,7,8,10 und 12 sind die variablen Produktionskosten der verschiedenen Aggregate angegeben.

Die übrigen Spalten enthalten die Ergebnisse der einzelnen Iterationsschritte. Die zugehörigen optimalen Produktionsmengen sind in der Tabelle 36 dargestellt.

---

1) Vgl. die Tabellen 27 und 28, S. 127 u. 129

Tabelle 35: Bestimmung der minimalen variablen Herstellungskosten in Abhängigkeit von X für die zweite und dritte Bearbeitungsstufe.

Bearbeitungsstufe:	2					3						
Maschine	1	2	1 bis 2	3	1 bis 3	1	2	1 bis 2	3	1 bis 3	4	1 bis 4
Menge	Kv	Kv	Minimum der Kv	Kv	Minimum der Kv	Kv	Kv	Minimum der Kv	Kv	Minimum der Kv	Kv	Minimum der Kv
10	288,00	255,00	255,00	240,00	240,00	220,00	216,00	216,00	240,00	216,00	225,00	216,00
50	1440,00	1275,00	1275,00	1200,00	1200,00	1100,00	1080,00	1080,00	1200,00	1080,00	1125,00	1080,00
100	2880,00	2550,00	2550,00	2400,00	2400,00	2200,00	2160,00	2160,00	2400,00	2160,00	2250,00	2160,00
150	4320,00	3825,00	3825,00	3600,00	3600,00	3300,00	3240,00	3240,00	3600,00	3240,00	3375,00	3240,00
170	4896,00	4335,00	4335,00	4080,00	4080,00	3740,00	3672,00	3672,00	4080,00	3672,00	3825,00	3672,00
200	5760,00	5100,00	5100,00	4800,00	4800,00	4400,00	4320,00	4320,00	4800,00	4320,00	4500,00	4320,00
210	6048,00	5355,00	5355,00	5040,00	5040,00	4620,00	4536,00	4536,00	5040,00	4536,00	4725,00	4536,00
250	7200,00	6375,00	6375,00	6000,00	6000,00	5500,00	5400,00	5400,00	6000,00	5400,00	5625,00	5400,00
300	8640,00	7650,00	7650,00	7200,00	7200,00	6600,00	6480,00	6480,00	7200,00	6480,00	6750,00	6480,00
320	9216,00	8160,00	8160,00	7680,00	7680,00	7040,00	6912,00	6912,00	7680,00	6912,00	7200,00	6912,00
350	10080,00	8924,99	8924,99	8399,99	8399,99	7699,99	7560,00	7560,00	8486,39	7560,00	7942,00	7560,00
400	11520,00	10199,99	10199,99	9599,99	9599,99	8799,99	8640,00	8640,00	9830,39	8640,00	9188,00	8640,00
410	11807,99	10454,99	10454,99	9839,99	9839,99	9019,99	8863,70	8860,00		8860,00	9433,85	8860,00
420	12095,99	10709,99	10709,99	10079,99	10079,99	9239,99	9101,30	9080,00		9080,00	9708,70	9080,00
430	12383,99	10964,99	10964,99	10319,99	10319,99	9459,99	9338,90	9300,00		9300,00	10024,55	9300,00
450	12959,99	11474,99	11474,99	10799,99	10799,99	9899,99	9814,09	9740,00		9740,00		9740,00
480	13823,99	12239,99	12239,99	11519,99	11519,99	10559,99	10526,89	10400,00		10400,00		10400,00
490	14111,99	12494,99	12494,99	11779,99	11779,99	10783,84	10764,49	10619,99		10619,99		10619,99
500	14399,99	12749,99	12749,99	12038,39	12029,99	11028,12	11002,09	10839,99		10839,99		10839,99
510	14687,99	13004,99	13004,99	12297,59	12284,99	11283,32	11239,69	11059,99		11059,99		11059,99
570	16435,99	14534,99	14534,99	13852,79	13814,99	12814,52		12379,99		12379,99		12379,99
590	16991,99	15044,99	15044,99	14371,19	14324,99	13324,92		12819,99		12819,99		12819,99
600	17279,99	15299,99	15299,99	14630,39	14579,99	13580,12		13039,99		13039,99		13039,99
620	17855,99	15809,99	15809,99	15259,09	15089,99	14091,09		13479,99		13479,99		13479,99
630	18143,99	16064,99	16064,99	15624,94	15344,99	14376,94		13699,99		13699,99		13699,99
650	18719,99	16586,54	16586,54		15854,99			14139,99		14139,99		14139,99
700	20159,99	18014,54	18014,54		17129,99			15239,99		15239,99		15239,99
750	21599,99	19442,54	19442,54		18404,99			16339,99		16339,99		16339,99
800	23039,99	20870,54	20870,54		19679,99			17439,99		17439,99		17439,99
810	23379,83	21156,13	21156,13		19934,99			17659,99		17659,99		17659,99
850	24739,19		22308,13		20954,99			18539,99		18539,99		18539,99
900	26438,39		23748,13		22229,99			19647,54		19647,54		19647,54
950	28137,58		25188,13		23504,99			20835,54		20835,54		20772,54
1000	29836,78		26628,13		24779,98			22023,53		22023,53		21897,54
1050			28068,13		26054,98			23288,61		23223,53		23022,54
1070			28644,13		26564,98			23799,01		23703,53		23472,54
1100			29508,13		27329,98			24564,61		24423,53		24147,54
1150			30948,13		28617,58			25882,33		25623,53		25272,54
1200			32388,13		29913,58					26823,53		26397,54
1250			33828,13		31216,93					28023,53		27560,34
1300			35268,13		32644,93					29223,53		28748,34
1350			36708,13		34072,93					30458,21		29943,53
1390			37860,13		35215,32					31479,01		30903,53
1400			38148,13		35500,92					31734,21		31143,53
1450			39588,13		36938,52					33010,78		32343,53
1500			41028,13		38378,52					34351,68		33543,53
1550			42468,13		39818,52					35712,72		34743,53
1600			43908,13		41258,52							35943,53
1650			45545,19		47698,52							37147,81
1700			47244,39		44138,52							38385,31
1750			48943,59		45578,52							39636,86
1800			50642,79		47018,52							40912,86
1850					48458,52							42198,86
1900					49898,52							43516,72
1950					51338,52							44860,72
1970					51916,52							45421,42
1980					52202,52							45737,27

Tabelle 36: Bestimmung des optimalen Einsatzes für die Aggregate der zweiten und dritten Bearbeitungsstufe bei einer Gesamterzeugung von 1800 ME.

Bearbeitungsstufe:	2				3					
	Optimale Produktionsmengen der Maschinen									
Menge	1	2	1 bis 2	3	1	2	1 bis 2	3	1 bis 3	4
10	0	10	0	10	0	10	10	0	10	0
50	0	50	0	50	0	50	50	0	50	0
100	0	100	0	100	0	100	100	0	100	0
150	0	150	0	150	0	150	150	0	150	0
170	0	170	0	170	0	170	170	0	170	0
200	0	200	0	200	0	200	200	0	200	0
210	0	210	0	210	0	210	210	0	210	0
250	0	250	0	250	0	250	250	0	250	0
300	0	300	0	300	0	300	300	0	300	0
320	0	320	0	320	0	320	320	0	320	0
350	0	350	0	350	0	350	350	0	350	0
400	0	400	0	400	0	400	400	0	400	0
410	0	410	0	410	10	400	410	0	410	0
420	0	420	0	420	20	400	420	0	420	0
430	0	430	0	430	30	400	430	0	430	0
450	0	450	0	450	50	400	450	0	450	0
480	0	480	0	480	80	400	480	0	480	0
490	0	490	10	480	90	400	490	0	490	0
500	0	500	20	480	100	400	500	0	500	0
510	0	510	30	480	110	400	510	0	510	0
550	0	550	70	480	150	400	550	0	550	0
570	0	570	90	480	170	400	570	0	570	0
590	0	590	110	480	190	400	590	0	590	0
600	0	600	120	480	200	400	600	0	600	0
620	0	620	140	480	220	400	620	0	620	0
630	0	630	150	480	230	400	630	0	630	0
650	0	650	170	480	250	400	650	0	650	0
700	0	700	220	480	300	400	700	0	700	0
750	0	750	270	480	350	400	750	0	750	0
800	0	800	320	480	400	400	800	0	800	0
810	0	810	330	480	410	400	810	0	810	0
850	40	810	370	480	450	400	850	0	850	0
900	90	810	420	480	490	410	900	0	900	0
950	140	810	470	480	490	460	950	0	900	50
1000	190	810	520	480	490	510	1000	0	900	100
1050	240	810	570	480	540	510	1000	50	900	150
1070	260	810	590	480	560	510	1000	70	900	170
1100	290	810	620	480	600	510	1000	110	900	210
1150	340	810	640	510	630	520	1000	150	900	250
1200	390	810	640	560			1000	200	900	300
1250	440	810	650	600			1000	250	930	320
1300	490	810	700	600			1000	300	980	320
1350	540	810	750	600			1030	320	1030	320
1390	580	810	790	600			1070	320	1070	320
1400	590	810	800	600			1080	320	1080	320
1450	640	810	850	600			1130	320	1130	320
1500	690	810	900	600			1140	360	1180	320
1550	740	810	950	600			1150	400	1230	320
1600	790	810	1000	600					1280	320
1650	830	820	1050	600					1330	320
1700	880	820	1100	600					1330	370
1750	930	820	1150	600					1340	410
1800	980	820	1200	600					1390	410
1850			1250	600					1440	410
1900			1300	600					1490	410
1950			1350	600					1540	410
1970			1370	600					1550	420
1980			1380	600					1550	430

Bei einem mehrstufigen Produktionsprozeß wird die größte realisierbare Ausbringungsmenge durch die Fertigungsstufe mit der geringsten Gesamtkapazität begrenzt. In dem vorliegenden Modell ergibt sich dieser Engpaß bei der dritten Bearbeitungsstufe, in der maximal 1988 ME hergestellt werden können. Da die Optimierung für jeweils 10 ME durchgeführt wurde, werden die optimalen Werte nur bis zu einer Gesamtproduktion von 1980 ME angegeben.

Mit diesen Ergebnissen läßt sich für jede mögliche Situation auf dem Absatzmarkt die kostenminimale bzw. gewinnmaximale Produktionsmengenaufteilung bestimmen. Wird z.B. die gesamte Fertigungsmenge durch den Absatzplan bereits festgelegt, dann kann anhand der Tabellen 28 und 36 für sämtliche Bearbeitungsstufen die kostengünstigste Beanspruchung der einzelnen Aggregate ermittelt werden. Die entsprechenden Produktionsmengen ergeben sich wieder nach dem in Abschnitt 5.1.2 beschriebenen Verfahren[1)], indem für die jeweils betrachtete Fertigungsstufe rückwärtsschreitend zunächst die optimale Menge der letzten Maschine, dann der vorletzten usw. festgelegt wird. Der Unterschied gegenüber dem ersten Modell besteht lediglich darin, daß diese Berechnung für jede Bearbeitungsstufe wiederholt werden muß.

Für die ermittelten Fertigungsmengen der einzelnen Aggregate können anschließend die kostenminimalen Anpassungsarten aufgrund der in den Tabellen 22 und 34 aufgeführten Werte angegeben werden. Analog zu der im vorhergehenden Modell gewählten Ausbringungsmenge von 1800 ME werden hier in der Tabelle 37 die entsprechenden optimalen Produktionsmengen sowie die erforderlichen Anpassungsarten für sämtliche Maschinen der letzten beiden Produktionsstufen dargestellt. Die Pfeile in der Tabelle 36 verdeutlichen den Ablauf für die Bestimmung der kostenminimalen Fertigungsmengen.

---

1) Vgl. S. 130

Tabelle 37: Darstellung der bei einer Gesamterzeugung von 1800 ME geltenden kostengünstigsten Anpassungsarten für die Maschinen der zweiten und dritten Bearbeitungsstufe.

Produktionsstufe	2			3			
Produktionsmenge der Maschine / Anpassungsart	1	2	3	1	2	3	4
zeitliche Anpassung ohne Überstunden	390	640	480	480	400	320	320
zeitliche Anpassung durch Überstunden	0	160	120	62	100	0	80
intensitätsmäßige Anpassung	0	10	0	18	10	0	10
optimale Produktionsmenge	390	810	600	560	510	320	410

Wird die Produktionsmenge nicht fest vorgegeben, dann muß zunächst wieder der maximale Deckungsbeitrag errechnet werden. Die gesamten minimalen variablen Herstellungskosten setzen sich in diesem Modell aus den ermittelten Kostenminima der einzelnen Produktionsstufen zusammen, so daß diese Werte für jede mögliche Ausbringungsmenge addiert werden müssen. Durch eine Gegenüberstellung der Ergebnisse mit den jeweils geltenden Erlösen kann dann die gewinnmaximale Produktionsmenge bestimmt werden. Für n verschiedene Bearbeitungsstufen mit j Maschinen ergibt sich die optimale Lösung aus der Bedingung:

$$(52.2) \qquad DB(X) = \text{Max} \left[E(X) + \sum_{i-1}^{n} F_{ij}(X) \right]$$

Bei einem konstanten Preis kann für diese Gleichung auch

$$(52.3) \qquad DB(X) = \text{Max} \left[P \cdot X + \sum_{i-1}^{n} F_{ij}(X) \right]$$

geschrieben werden.

Ist der Preis von der Höhe der Verkaufsmenge abhängig, dann gilt die Beziehung:

$$(52.4) \qquad DB(X) = \text{Max} \left[P(X) \cdot X + \sum_{i-1}^{n} F_{ij}(X) \right]$$

In der Tabelle 38 sind in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge die gesamten minimalen variablen Herstellungskosten des dreistufigen Fertigungsprozesses angegeben. Darüber hinaus sind auch die Erlöse und Deckungsbeiträge für einen konstanten Preis von 150,- DM und für eine Preisabsatzfunktion von der Form P(X) = 170 - 0,02X dargestellt.

Für die Preisabsatzfunktion ergibt sich z.B. der maximale Deckungsbeitrag mit 25.181,40 DM bei einem Preis von 148,60 DM und einer Produktionsmenge von 1070 ME. Für diese Ausbringungsmenge muß nach dem oben beschriebenen Verfahren die optimale Produktionsmengenaufteilung in jeder Fertigungsstufe festgelegt werden. In der Tabelle 39 sind die entsprechenden Ergebnisse sowie die gewinnmaximalen Lösungen für verschiedene andere Preise bzw. Preisabsatzfunktionen angegeben.

Ebenso wie im ersten Modell gilt auch hier, daß die Optimierung für beliebige Kosten- und Preisentwicklungen durchgeführt werden kann, so daß z.B. auch Kosten für Umrüstungen oder Nachtschichten erfaßt werden könnten. Darüber hinaus besteht auch die Möglichkeit, nach dem in Abschnitt 5.1.2 beschriebenen Verfahren[1] Ausschußfaktoren für einzelne oder sämtliche Aggregate in die Planung einzubeziehen.

Schließlich kann dieses Modell auch mit dem von Shephard und Elsner entwickelten Algorithmus als mehrperiodisches Planungsproblem formuliert werden.[2] Die zu optimierenden Kosten setzen sich dann aus den minimalen variablen Herstellungskosten sämtlicher Produktionsstufen und den geltenden Lagerhaltungskosten zusammen.

---

1) Vgl. S. 135
2) Vgl. die Ausführungen des Abschnittes 5.1.2, S. 136

Tabelle 38: Bestimmung der gewinnmaximalen Produktionsmenge für P = 145,- DM und P(X) = 170 - 0,02X.

Menge	variable Kosten	P=145,00	Erlös für P=145,00	Deckungsbeitrag für P=145,00	P(x)= 170-0,02x	Erlös für P(x)=170-0,02x	Deckungsbeitrag für P(x)=170-0,02x
10	1236,00	145,00	1450,00	214,00	169,80	1698,00	462,00
50	6180,00	145,00	7250,00	1070,00	169,00	8450,00	2270,00
100	12360,00	145,00	14500,00	2140,00	168,00	16800,00	4440,00
150	18539,99	145,00	21750,00	3210,01	167,00	25050,00	6510,00
200	24719,99	145,00	29000,00	4280,01	166,00	33200,00	8480,01
250	30899,99	145,00	36250,00	5350,01	165,00	41250,00	10350,01
300	37079,99	145,00	43500,00	6420,01	164,00	49200,00	12120,01
350	43259,98	145,00	50750,00	7490,02	163,00	57050,00	13790,02
400	49439,98	145,00	58000,00	8560,02	162,00	64800,00	15360,02
450	55639,98	145,00	65250,00	9610,02	161,00	72450,00	16810,02
500	61869,98	145,00	72500,00	10630,02	160,00	80000,00	18130,02
550	68144,98	145,00	79750,00	11605,02	159,00	87450,00	19305,02
600	74419,97	145,00	87000,00	12580,02	158,00	94800,00	20380,02
650	80694,97	145,00	94250,00	13555,03	157,00	102050,00	21355,03
700	86969,97	145,00	101500,00	14530,03	156,00	109200,00	22230,03
750	93244,96	145,00	108750,00	15505,04	155,00	116250,00	23005,04
800	99519,96	145,00	116000,00	16480,04	154,00	123200,00	23680,04
850	105854,06	145,00	123250,00	17395,94	153,00	130050,00	24195,94
900	112196,61	145,00	130500,00	18303,39	152,00	136800,00	24603,39
950	118556,60	145,00	137750,00	19193,39	151,00	143450,00	24893,39
1000	124916,60	145,00	145000,00	20083,39	150,00	150000,00	25083,39
1050	131276,60	145,00	152250,00	20973,40	149,00	156450,00	25173,40
1070	133829,60	145,00	155150,00	21329,40	148,60	159002,00	25181,40
1100	137636,60	145,00	159500,00	21863,40	148,00	162800,00	25163,40
1150	144009,20	145,00	166750,00	22740,00	147,00	169050,00	25040,80
1200	150390,00	145,00	174000,00	23609,80	146,00	175200,00	24809,80
1250	156840,04	145,00	181250,00	24409,96	145,00	181250,00	24409,96
1300	163456,04	145,00	188500,00	25043,96	144,00	187200,00	23743,96
1350	170079,23	145,00	195750,00	25670,76	143,00	193050,00	22970,76
1400	176707,23	145,00	203000,00	26292,77	142,00	198800,00	22092,77
1450	183344,83	145,00	210250,00	26905,17	141,00	204450,00	21105,17
1500	190105,19	145,00	217500,00	27394,81	140,00	210000,00	19894,81
1550	196957,18	145,00	224750,00	27792,81	139,00	215450,00	18492,81
1600	203831,58	145,00	232000,00	28168,42	138,00	220800,00	16968,42
1650	210750,72	145,00	239250,00	28499,28	137,00	226050,00	15299,28
1700	217748,22	145,00	246500,00	28751,78	136,00	231200,00	13451,78
1750	224759,76	145,00	253750,00	28990,23	135,00	236250,00	11490,23
1800	231795,76	145,00	261000,00	29204,24	134,00	241200,00	9404,24
1850	238831,76	145,00	268250,00	29418,24	133,00	246050,00	7218,24
1900	245919,62	145,00	275500,00	29580,37	132,00	250800,00	4880,37
1950	253023,62	145,00	282750,00	29726,37	131,00	255450,00	2426,38
1970	255888,32	145,00	285650,00	29761,68	130,60	257282,00	1393,68
1980	257356,17	145,00	287100,00	29743,83	130,40	258192,00	835,83

Tabelle 39: Darstellung der gewinnmaximalen Lösungen für verschiedene konstante Preise und Preisabsatzfunktionen.

konstante Preise bzw. Preis-absatzfunktionen	gewinn-maximaler Preis in DM	maximaler Deckungsbeitrag in DM	gewinnmaximale Produktionsmenge	Bearbeitungsstufe: 1						2			3			
				optimale Produktionsmenge für die Maschine												
				1	2	3	4	5	6	1	2	3	1	2	3	4
P=145,00	145,00	29761,68	1970	500	330	420	420	0	300	560	810	600	630	520	400	420
P=150,00	150,00	39643,83	1980	500	340	420	420	0	300	570	810	600	630	520	400	430
P(x)=160-0,02x	143,40	15701,94	830	490	0	10	330	0	0	0	350	480	430	400	0	0
P(x)=170-0,02x	148,60	25181,40	1070	490	0	250	330	0	0	0	590	480	490	410	0	170
P(x)=170-0,01x	153,80	42572,42	1620	490	0	420	410	0	300	210	810	600	490	510	300	320

Mit diesen Ausführungen wird deutlich, daß auch bei einem mehrstufigen Produktionsprozeß die Optimierung mit Hilfe der dynamischen Programmierung vorgenommen werden kann. Ein wesentlicher Vorteil der beschriebenen Modelle besteht darin, daß sie sehr leicht veränderten Situationen angepaßt werden können. Neben der Kosten- und Preisentwicklung kann z.B. auch die Zahl der Aggregate oder die der Produktionsstufen sowie die Länge des Planungszeitraums beliebig festgesetzt werden. Die Brauchbarkeit der ersten beiden Modelle endet aber dann, wenn eine simultane Optimierung für zwei oder mehr Produkte durchgeführt werden muß. Deshalb wird im folgenden Abschnitt ein Modell diskutiert, mit dem auch bei mehreren Erzeugnissen eine gewinnmaximale Lösung ermittelt werden kann.

5.3 Drittes Modell: Mehrproduktbetrieb mit einstufiger Fertigung

5.3.1 Die Voraussetzungen des Modells

Eine Unternehmung besitzt ein Mehrzweckaggregat, auf dem 4 verschiedene Erzeugnisse hergestellt werden können. Die Produktionsplanung soll für einen Monat durchgeführt werden, wobei wieder 20 Arbeitstage mit jeweils 8 Stunden Arbeitszeit angenommen werden. Dementsprechend beträgt die gesamte verfügbare Produktionszeit 160 Stunden bzw. 9600 Minuten. Für 1 ME der verschiedenen Produkte werden unterschiedliche Bearbeitungszeiten benötigt. Außerdem gelten für die einzelnen Erzeugnisse konstante variable Herstellungskosten pro Stück. Dabei muß beachtet werden, daß diese Kosten nicht nur von der Produktionszeit, sondern auch von den verwendeten Werkstoffen abhängen, so daß selbst bei zwei verschiedenen Erzeugnissen mit gleicher Bearbeitungszeit unterschiedliche Stückkosten auftreten können.

Bevor die Fertigung irgendeines Produktes vorgenommen werden kann, muß die Maschine entsprechend eingerichtet werden. Ebenso muß am Ende oder bei einer Umstellung des Produktionsprozesses das Aggregat zunächst wieder in die Ausgangsstellung gebracht werden. Der damit verbundene Zeitaufwand wird im folgenden unter dem Begriff Rüstzeit zusammengefaßt. Dementsprechend werden die auftretenden Kosten als Rüstkosten bezeichnet.

Um eine gewinnmaximale Lösung bestimmen zu können, müssen neben den Kosten auch die Verkaufspreise der einzelnen Erzeugnisse vorgegeben werden. Ebenso wie in den ersten beiden Modellen kann man auch hier beliebige Preisentwicklungen berücksichtigen.[1)] Darüber hinaus müssen die Mengen der verschiedenen Produkte festgelegt werden, die maximal auf dem Absatzmarkt verkauft werden können.

---

1) Vgl. die Ausführungen des folgenden Abschnitts, S. 153

Die im vorliegenden Modell unterstellten Werte sind in der Tabelle 40 aufgeführt. Dabei gibt die Spalte 3 die Mengen der einzelnen Erzeugnisse an, die aufgrund der erforderlichen Bearbeitungszeiten - ohne Rüstzeit - in einer Fertigungsstunde hergestellt werden können. Multipliziert man diese Mengen mit den variablen Stückkosten der Produkte, dann ergeben sich die Herstellungskosten, die in einer Arbeitsstunde für ein bestimmtes Erzeugnis anfallen. Ebenso werden die maximalen Verkaufsmengen in Produktionsstunden ausgedrückt, wobei die Rüstzeiten berücksichtigt sind. Für 202 ME des ersten Erzeugnisses werden z.B. 2020 Minuten bzw. 33 Stunden und 40 Minuten Bearbeitungszeit sowie 20 Minuten Rüstzeit benötigt, so daß für dieses Produkt maximal 34 Arbeitsstunden erforderlich sind. - Die Absatzpreise werden hier in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge durch eine lineare Preisabsatzfunktion angegeben.

Tabelle 40: Übersicht über die Determinanten des Produktions- und Absatzbereichs für 4 verschiedene Erzeugnisse.

Produkt	Bearbeitungszeit in Min.	Produktionsmenge pro Std.	Rüstzeit in Min.	Rüstkosten	Kv/Stück	Kv/Std.	Maximale Verkaufsmenge		Preisabsatzfunktion
							in Stück	in Produktionsstunden	
1	1o	6	2o	1o,oo	7,5o	45,oo	2o2	34	P(x)=11-o,o15x
2	12	5	24	15,oo	1o,oo	5o,oo	298	6o	P(x)=13-o,o1x
3	15	4	3o	2o,oo	15,oo	6o,oo	27o	68	P(x)=19-o,o15x
4	1o	6	4o	25,oo	9,oo	54,oo	25o	42	P(x)=14-o,o2x

Für diese Werte soll nun im nächsten Abschnitt der optimale Produktionsplan aufgestellt werden.

5.3.2 Lösungsansatz und optimale Entscheidung

Das Ziel der Optimierung besteht darin, auf der vorhandenen Anlage nur soviel ME der einzelnen Erzeugnisse herzustellen, daß der gesamte Gewinn maximiert wird. Da zu Beginn der Planung noch unbekannt ist, wieviel Fertigungsstunden dafür benötigt werden, muß man zunächst für jede mögliche Produktionszeit den größten realisierbaren Gewinn bzw. Deckungsbeitrag ermitteln.

Diese Berechnung kann wieder mit Hilfe der dynamischen Programmierung durchgeführt werden. Die gesamte verfügbare Arbeitszeit muß in einzelne Zeiteinheiten (ZE) unterteilt werden, wobei z.B. 1 Minute, 1 Stunde oder ein beliebiger anderer Zeitabschnitt als Zeiteinheit gewählt werden kann.[1)]

In dem vorliegenden Modell wird der kleinste Zeitraum mit einer Stunde angesetzt, so daß sich hier für die maximale Fertigungszeit 160 ZE ergeben. Die Produktionszeit - im folgenden durch PZ symbolisiert - kann also zwischen einer und 160 ZE variiert werden.

Für die Bestimmung des optimalen Produktionsplans müssen nun zunächst in Abhängigkeit von PZ die Deckungsbeiträge ermittelt werden, die sich ergeben, wenn jeweils nur ein Erzeugnis hergestellt wird. Die längste sinnvolle Fertigungszeit für die einzelnen Produkte wird dabei durch die entsprechende maximale Verkaufsmenge begrenzt. So werden z.B. für das erste Erzeugnis höchstens 34 Produktionsstunden benötigt. PZ kann also in diesem Falle nur Werte zwischen 1 und 34 annehmen. Innerhalb dieser Grenzen wird für jede mögliche Anzahl von Arbeitsstunden (Zeiteinheiten) der Deckungsbeitrag des ersten Produktes bestimmt. Dazu müssen die Erlöse und Herstellungskosten in Abhängigkeit von der Fertigungszeit ermittelt werden.

Für die Bearbeitung des ersten Erzeugnisses sind z.B. 20 Minuten Rüstzeit erforderlich, so daß bei einer

---

1) Vgl. auch S. 154 ff.

einstündigen Produktion nur 4 ME hergestellt werden können. Die Fertigungskosten der ersten Arbeitsstunde setzen sich demnach aus den Rüstkosten (= 10,- DM) und den variablen Stückkosten für 4 ME (= 4 • 7,50 DM = 30,- DM) zusammen. Aufgrund der in Tabelle 40 angegebenen Preisabsatzfunktion ergibt sich bei 4 ME ein Verkaufspreis von 10,94 DM und damit ein Erlös von 43,76 DM. Der Deckungsbeitrag des ersten Produktes beträgt also bei einer Arbeitszeit von einer Stunde 43,76 DM - 40,00 DM = 3,76 DM.

Wird die Fertigungszeit auf 2 Stunden ausgedehnt, dann können von dem betrachteten Erzeugnis 6 weitere ME hergestellt werden. Die Produktionskosten erhöhen sich dabei um die variablen Stückkosten (= 6 • 7,50 DM = 45,00 DM) auf insgesamt 85,00 DM. Der Erlös, der in diesem Falle für 10 ME bestimmt werden muß, beträgt 108,50 DM bei einem Preis von 10,85 DM. Dementsprechend ergibt sich für beide Stunden ein Deckungsbeitrag von 23,50 DM.

In gleicher Weise muß für jeden zulässigen Wert von PZ der Deckungsbeitrag des ersten Erzeugnisses ermittelt werden, wobei durch jede weitere Arbeitsstunde die Fertigungsmenge um 6 ME zunimmt und die Produktionskosten um 45,- DM ansteigen. Anschließend wird diese Berechnung auch für die übrigen Erzeugnisse durchgeführt. In der Tabelle 41 sind die entsprechenden Erlöse und Herstellungskosten für sämtliche Produkte in Abhängigkeit von der Fertigungszeit angegeben. Die daraus resultierenden Deckungsbeiträge sind in der Tabelle 42 dargestellt.

Die im vorliegenden Modell unterstellten Werte sind so gewählt, daß eine Arbeitsstunde gerade ausreicht, um eine ganzzahlige Produktionsmenge herzustellen. Diese Bedingung braucht in der Praxis jedoch keineswegs erfüllt zu sein. Es besteht ebenso die Möglichkeit, daß sich am Ende einer Fertigungsstunde die jeweils letzte ME noch im Produktionsprozeß befindet.

Tabelle 41: Bestimmung der Kosten und Erlöse für 4 verschiedene Erzeugnisse in Abhängigkeit von der Fertigungszeit.

Produkt / Stunden	1		2		3		4	
	Kosten	Erlös	Kosten	Erlös	Kosten	Erlös	Kosten	Erlös
1	40,00	43,76	45,00	38,91	50,00	37,94	43,00	27,92
5	220,00	296,24	245,00	293,71	290,00	337,14	259,00	350,48
10	445,00	587,54	495,00	600,96	590,00	700,34	529,00	721,28
15	670,00	851,84	745,00	895,71	890,00	1051,54	799,00	1056,08
20	895,00	1089,14	995,00	1177,96	1190,00	1390,74	1069,00	1354,88
21	940,00	1133,36	1045,00	1232,91	1250,00	1457,14	1123,00	1410,32
25	1120,00	1299,44	1245,00	1447,71	1490,00	1717,94	1339,00	1617,68
30	1345,00	1482,74	1495,00	1704,96	1790,00	2033,14	1609,00	1844,48
34	1525,00	1609,94	1695,00	1901,76	2030,00	2276,66	1825,00	2000,00
35			1745,00	1949,71	2090,00	2336,34	1879,00	2035,28
40			1995,00	2181,96	2390,00	2627,54	2149,00	2190,08
45			2245,00	2401,71	2690,00	2906,74		
50			2495,00	2608,96	2990,00	3173,94		
55			2745,00	2803,71	3290,00	3429,14		
60			2995,00	2985,96	3590,00	3672,34		
65					3890,00	3903,54		
68					4070,00	4036,50		

Unterstellt man, daß nur Fertigfabrikate abgesetzt werden können, dann kann für diese ME kein Erlös realisiert werden. Bei einer ZE von einer Stunde würde dementsprechend die Ermittlung der Deckungsbeiträge nur Näherungswerte ergeben, da den Herstellungskosten für das Halbfabrikat kein Erlös gegenübergestellt wird.

Diese Ungenauigkeiten lassen sich jedoch dadurch beseitigen, daß eine andere ZE gewählt wird, die sowohl größer als auch kleiner sein kann. Dabei wird die kleinste ZE im allgemeinen mindestens 1 Minute betragen, da die Verbesserungen der Planungsergebnisse durch eine noch stärkere Unterteilung der Produktionszeit praktisch gar nicht verwirklicht werden können.

Für die ermittelten Deckungsbeiträge kann nun mit Hilfe der dynamischen Programmierung der optimale Produktionsplan aufgestellt werden. Um die Gewinnmaximierung realisieren zu können, muß das betrachtete Aggregat in jeder ZE so eingesetzt werden, daß der jeweils größte Deckungsbeitrag erzielt wird.

Dieses Optimierungsprinzip liegt dem folgenden Iterationsverfahren zugrunde.

Die Berechnung erfolgt vorwärtsschreitend, wobei in jedem Planungsschritt ein weiteres Produkt in die Betrachtung einbezogen wird. Im ersten Optimierungsschritt werden die Erzeugnisse 1 und 2 gegenübergestellt und für jeden möglichen Wert von PZ die vorteilhafteste Produktionsalternative ermittelt.

Bei einer Arbeitsstunde ergeben sich z.B. 2 Fertigungsmöglichkeiten, da entweder nur das erste oder nur das zweite Produkt hergestellt werden kann. Ein Vergleich der in Tabelle 42 angegebenen Deckungsbeiträge zeigt, daß durch die Herstellung des ersten Produktes der größere Deckungsbeitrag (= 3,76 DM) verwirklicht wird.

Für PZ = 2 existieren 3 Produktionsalternativen:

1. In den beiden Fertigungsstunden wird nur das erste Produkt hergestellt.
2. In den beiden Fertigungsstunden wird nur das zweite Produkt hergestellt.
3. Für beide Produkte wird jeweils eine Fertigungsstunde zur Verfügung gestellt.

Von diesen Möglichkeiten muß wiederum diejenige ausgewählt werden, durch die der größte Deckungsbeitrag realisiert wird. Dabei ist in diesem Modell die erste Fertigungsalternative mit einem Deckungsbeitrag von 23,50 DM am vorteilhaftesten.

In gleicher Weise muß für jeden zulässigen Wert von PZ die optimale Aufteilung der Produktionszeiten für die ersten beiden Erzeugnisse bestimmt werden. Die sich dabei ergebenden maximalen Deckungsbeiträge sind in der Spalte 4 der Tabelle 42 für jede möglich Fertigungszeit angegeben. In den Spalten 2 und 3 der Tabelle 43 sind die zugehörigen optimalen Produktionszeiten der ersten beiden Produkte - ebenfalls in Abhängigkeit von PZ - aufgeführt.

Unter Berücksichtigung dieser Ergebnisse kann dann im zweiten Iterationsschritt die Optimierung für 3 Erzeugnisse vorgenommen werden. Für jeden zulässigen Wert von PZ muß wieder die Fertigungsalternative ermittelt werden, die den größten Deckungsbeitrag ermöglicht. Bei einer Arbeitsstunde könnte z.B. - entsprechend der optimalen Entscheidung des vorhergehenden Planungsschrittes - das vorteilhafteste von den ersten beiden Erzeugnissen hergestellt werden oder das dritte Produkt bearbeitet werden. Von diesen beiden Möglichkeiten ist hier die erste günstiger, da sie den größeren Deckungsbeitrag (= 3,76 DM) realisiert.

Stehen 2 ZE zur Verfügung, so ergeben sich 3 Produktionsalternativen:

Tabelle 42: Bestimmung des maximalen Deckungsbeitrags in Abhängigkeit von der Produktionszeit für 4 verschiedene Erzeugnisse.

Produkt	1	2	1 bis 2	3	1 bis 3	4	1 bis 4
Stunden	DB	DB	Maximum des DB	DB	Maximum des DB	DB	Maximum des DB
1	3,76	- 6,09	3,76	- 12,06	3,76	- 15,08	3,76
5	76,24	48,71	76,24	47,14	76,24	91,48	91,48
10	142,54	105,96	142,54	110,34	142,54	192,28	192,28
15	181,64	150,71	192,60	161,54	193,12	257,08	268,52
20	194,14	182,96	248,50	200,74	252,98	285,88	341,78
21	193,36	187,91	258,52	207,14	264,08	287,32	354,74
25	179,44	202,71	295,81	227,94	304,82	278,68	399,62
30	137,74	209,96	334,47	243,14	359,59	235,48	453,42
34	84,94	206,76	359,35	246,66	401,02	175,00	499,98
35		204,71	364,80	246,34	410,97	156,28	511,08
40		186,96	386,31	237,54	457,35	41,08	561,90
45		156,71	399,57	216,74	498,73		617,31
50		113,96	404,10	183,94	535,21		668,05
55		58,71	400,12	139,14	566,71		714,43
60		- 9,04	387,67	82,34	593,21		756,59
65			366,45	13,54	614,71		794,30
68			349,75	- 33,50	625,22		814,91
70			337,02		631,21		827,76
75			298,77		642,71		856,54
80			252,15		649,21		880,99
84			280,50		650,76		897,71
85			196,92		650,71		901,25
90			133,06		647,21		917,09
95					638,71		928,59
100					625,21		935,58
105					606,71		938,08
106					602,55		938,08
110					583,21		936,38
115					554,81		930,26
120					521,43		919,80
125					483,05		905,01
130					439,67		885,55
135					391,29		861,89
140					337,91		833,81
145					279,53		801,40
150					216,15		764,82
155					147,77		723,40
160					74,24		677,89

Tabelle 43: Bestimmung der optimalen Produktionszeit für 4 verschiedene Erzeugnisse.

Stunden	optimale Produktionszeit für die Produkte					
	1	2	1 bis 2	3	1 bis 3	4
1	1	o	1	o	1	o
5	5	o	5	o	o	5
1o	1o	o	1o	o	o	1o
15	9	6	8	7	5	1o
2o	1o	1o	9	11	8	12
21	11	1o	1o	11	8	13
25	12	13	11	14	1o	15
3o	13	17	19	11	17	13
34	15	19	21	13	2o	14
35	15	2o	22	13	21	14
4o	17	23	25	15	25	15
45	18	27	28	17	31	14
5o	2o	3o	3o	2o	35	15
55	21	34	33	22	4o	15
6o	23	37	36	24	44	16
65	24	41	39	26	48	17
68	25	43	41	27	51	17
7o	26	44	42	28	53	17
75	28	47	45	3o	57	18
8o	29	51	48	32	62	18
84	3o	54	5o	34	65	19
85	31	54	51	34	66	19
9o	32	58	54	36	7o	2o
95			57	38	75	2o
1oo			6o	4o	79	21
1o5			63	42	84	21
1o6			63	43	84	22
11o			66	44	88	22
115			68	47	92	23
12o			71	49	97	23
125			74	51	1o1	24
13o			77	53	1o6	24
135			8o	55	11o	25
14o			83	57	114	26
145			86	59	119	26
15o			89	61	123	27
155			92	63	128	27
16o			94	66	132	28

1. Beide ZE können entsprechend der Ergebnisse des ersten Iterationsschrittes für die Produkte 1 und 2 eingesetzt werden.
2. Beide ZE können für das dritte Produkt eingesetzt werden.
3. Für das vorteilhafteste der ersten beiden Erzeugnisse und für das dritte Produkt wird jeweils eine ZE zur Verfügung gestellt.

Der maximale Deckungsbeitrag wird dabei in diesem Modell durch die erste Fertigungsmöglichkeit erzielt.

In gleicher Weise muß das beschriebene Iterationsverfahren jeweils in Abhängigkeit von PZ solange fortgesetzt werden, bis sämtliche Erzeugnisse erfaßt sind. Die entsprechenden Ergebnisse sind in den Tabellen 42 und 43 dargestellt.

Um für das erläuterte Optimierungsprinzip eine allgemeingültige mathematische Zielfunktion aufstellen zu können, werden folgende Symbole eingeführt: Mit $DB(PZ_j)$ wird der Deckungsbeitrag bezeichnet, der sich ergibt, wenn das Produkt j PZ_j - Zeiteinheiten hergestellt wird. Durch F_j wird der maximale Deckungsbeitrag charakterisiert, der bei einer optimalen Aufteilung der Produktionszeit für j verschiedene Erzeugnisse realisiert werden kann. Dementsprechend gilt dann für die Bestimmung der relativen Optima die Bedingung:

$$(53.1) \qquad F_j(PZ) = \max_{PZ_j} \left[DB\,(PZ_j) + F_{j-1}\,(PZ-PZ_j) \right] ,$$

wobei F_{j-1} den maximalen Deckungsbeitrag angibt, der im vorhergehenden Optimierungsschritt bei j-1 Erzeugnissen für den Zeitraum $PZ-PZ_j$ errechnet wurde.

Damit wird deutlich, daß in jedem Planungsschritt die gesamte Produktionszeit (PZ) und die Fertigungszeit, die für das jeweils letzte Produkt (j) aufgewendet wird (PZ_j), als Variable auftreten. Der größte Wert für PZ_j ergibt sich dabei durch die in Produktionsstunden ausgedrückte maximale Verkaufsmenge des Er-

zeugnisses j. Für PZ erhöht sich die obere Grenze mit jedem Iterationsschritt solange um die Fertigungsstunden, die für die maximale Absatzmenge des neu hinzukommenden Produktes benötigt werden, bis die gesamte verfügbare Produktionszeit (= 160 Stunden) erreicht ist.

Nachdem die optimalen Werte für sämtliche Erzeugnisse innerhalb der zulässigen Bereiche bestimmt worden sind, kann die gewinnmaximale Lösung angegeben werden. Zunächst muß von den Ergebnissen des letzten Iterationsschrittes der größte Deckungsbeitrag ausgewählt werden. Dabei ergibt sich in dem vorliegenden Modell ein Wert von 938,08 DM, der sowohl bei 105 als auch bei 106 Arbeitsstunden erzielt werden kann. Es existieren hier also 2 gewinnmaximale Fertigungsalternativen, von denen eine verwirklicht werden muß.

Die zugehörigen optimalen Produktionszeiten für die einzelnen Erzeugnisse werden wieder in entgegengesetzte Richtung zum Optimierungsverfahren festgelegt. In Abhängigkeit von der gewinnmaximalen Fertigungszeit ergibt sich aus den Ergebnissen des letzten Iterationsschrittes die optimale Produktionszeit für das vierte Erzeugnis.

Bei 105 Arbeitsstunden wurden hier z.B. 21 Fertigungsstunden für das Produkt 4 ermittelt. Für die verbleibende Produktionszeit von 84 Stunden folgt dann aus dem zweiten Planungsschritt die optimale Bearbeitungszeit des dritten Erzeugnisses mit 34 Stunden. Schließlich geht aus den Werten des ersten Iterationsschrittes hervor, daß bei einer Produktionszeit von 50 Stunden 30 Stunden für das zweite Erzeugnis und 20 Stunden für das erste Erzeugnis eingesetzt werden müssen. Zur Verdeutlichung ist dieser Lösungsweg in der Tabelle 43 durch einen Pfeil besonders gekennzeichnet.

Die ermittelten optimalen Produktionszeiten können anschließend wieder aufgrund der eingangs genannten Rüst- und Bearbeitungszeiten in ME umgerechnet werden.

In der Tabelle 44 sind die entsprechenden Fertigungsmengen der einzelnen Erzeugnisse sowie die realisierbaren Preise angegeben.

Tabelle 44: Bestimmung der gewinnmaximalen Fertigungsmengen und Preise der verschiedenen Produkte.

Produkt	optimale Produktionszeit in Stunden	optimale Fertigungsmenge	gewinnmaximaler Preis in DM
1	20	118	9,23
2	30	148	11,52
3	34	134	16,99
4	21	122	11,56

Damit wird deutlich, daß mit dem beschriebenen Iterationsverfahren für jede mögliche Produktionszeit die optimalen Fertigungsmengen der einzelnen Erzeugnisse bestimmt werden können. Unterstellt man z.B., daß eine tägliche Arbeitszeit von 8 Stunden nicht überschritten werden soll, dann müssen die für PZ = 160 geltenden optimalen Produktionszeiten realisiert werden.

Da die Reihenfolge der optimalen Lose nicht vorgeschrieben ist, kann der Produktionsablauf eventuell auch so gesteuert werden, daß bestimmte Liefertermine eingehalten werden können.

Legt der Absatzplan z.B. die Fertigungsmengen einzelner Erzeugnisse fest, dann muß die dazu benötigte Arbeitszeit von der gesamten verfügbaren Produktionszeit abgezogen werden. Für den verbleibenden Zeitraum können anschließend nach dem oben erläuterten Iterationsverfahren die optimalen Produktionszeiten der übrigen Erzeugnisse bestimmt werden.

Schließlich besteht auch die Möglichkeit, Ausschußfaktoren in die Planung einzubeziehen. Eine fehlerhafte Produktion kann dadurch berücksichtigt werden,

daß die in Abhängigkeit von der Fertigungszeit angegebenen Erlöse entsprechend korrigiert werden. Können z.B. in einem bestimmten Zeitraum 100 ME eines Erzeugnisses hergestellt werden, dann muß den anfallenden Herstellungskosten bei einem Ausschuß von 5% der Erlös für 95 ME gegenübergestellt werden. Die Differenz ergibt den tatsächlich realisierbaren Deckungsbeitrag, der für die Optimierung benötigt wird.

Im nächsten Abschnitt soll gezeigt werden, daß auch bei einem mehrstufigen Produktionsprozeß für verschiedene Erzeugnisse eine gewinnmaximale Lösung mit Hilfe der dynamischen Programmierung bestimmt werden kann.

5.4 Viertes Modell: Mehrproduktbetrieb mit mehrstufiger Fertigung

5.4.1 Die Voraussetzungen des Modells

Ein Mehrproduktbetrieb stellt 4 verschiedene Erzeugnisse in einem dreistufigen Fertigungsprozeß her. Die Produktionsplanung wird für einen Monat durchgeführt, wobei wieder 20 Arbeitstage mit jeweils 8 Stunden Arbeitszeit angenommen werden. Die einzelnen Erzeugnisse müssen in der angegebenen Reihenfolge der Produktionsstufen bearbeitet werden. Transportkosten von einer Stufe zur anderen bleiben in diesem Modell unberücksichtigt.[1)] Ebenso werden Lagerhaltungskosten für Halbfabrikate nicht erfaßt. Für 1 ME der verschiedenen Produkte werden auf jedem Aggregat unterschiedliche Bearbeitungszeiten benötigt. Dabei wird unterstellt, daß die längsten Fertigungszeiten für sämtliche Erzeugnisse in einer Produktionsstufe auftreten. Die variablen Herstellungskosten pro Stück sind in jeder Fertigungsstufe konstant. Außerdem sind für sämtliche Erzeugnisse bei allen Maschinen Rüstzeiten erforderlich. Darüber hinaus werden auch hier die maximalen Verkaufsmengen der einzelnen Produkte festgelegt und die jeweils geltenden Preise bzw. Preisabsatzfunktionen vorgegeben.

Die im vorliegenden Modell unterstellten Werte sind in der Tabelle 45 zusammengefaßt.

Die Produktionsmengen und variablen Herstellungskosten der verschiedenen Erzeugnisse werden wieder pro Arbeitsstunde angegeben, da auch hier eine Fertigungsstunde als ZE zugrunde gelegt wird. Außerdem sind die Produktionsstunden aufgeführt, die für die maximalen Verkaufsmengen in jeder Bearbeitungsstufe benötigt werden. Für die Absatzpreise werden ebenso wie im dritten Modell lineare Preisabsatzfunktionen unterstellt.

---

1) Vgl. S. 166

Tabelle 45: Übersicht über die Determinanten des Produktions- und Absatzbereichs für 4 verschiedene Erzeugnisse.

Bearbeitungsstufe	Produkt	Bearbeitungszeit in Min.	Produktionsmenge pro Std.	Rüstzeit in Min.	Rüstkosten	Kv/Stück	Kv/Std.	Maximale Verkaufsmenge		Preisabsatzfunktion
								in Stück	in Produktionsstunden	
1	1	10	6	20	10,00	7,50	45,00	203	35	P(x)=46-0,01x
	2	12	5	24	15,00	10,00	50,00	298	60	P(x)=40-0,015x
	3	10	6	20	25,00	11,00	66,00	270	46	P(x)=36-0,012x
	4	10	6	40	25,00	9,00	54,00	250	42	P(x)=42-0,02x
2	1	15	4	15	20,00	18,00	72,00	203	51	
	2	12	5	24	30,00	15,00	75,00	298	60	
	3	15	4	30	20,00	15,00	60,00	270	68	
	4	15	4	30	40,00	20,00	80,00	250	63	
3	1	10	6	20	25,00	15,00	90,00	203	35	
	2	6	10	12	15,00	8,00	80,00	298	30	
	3	5	12	10	12,00	6,00	72,00	270	23	
	4	10	6	30	35,00	10,50	63,00	250	42	

5.4.2 Lösungsansatz und optimale Entscheidung

Die Fertigung muß so gesteuert werden, daß der gesamte Gewinn maximiert wird. Um den entsprechenden Produktionsplan bestimmen zu können, müssen zunächst die Deckungsbeiträge der einzelnen Erzeugnisse in Abhängigkeit von der Produktionszeit angegeben werden. Dazu benötigt man wieder die Mengen der verschiedenen Produkte, die in einer ZE hergestellt werden können.

Aufgrund der hier gewählten Bearbeitungszeiten liegen diese Mengen für die einzelnen Fertigungsstufen bereits fest. So ergeben sich z.B. für das erste Erzeugnis 6 ME in der ersten und dritten Produktionsstufe und 4 ME in der zweiten Produktionsstufe. Dabei muß beachtet werden, daß jedes Produkt sämtliche Bearbeitungsstufen

durchlaufen muß. Das bedeuted, daß bei gleichzeitiger Fertigung auf allen Maschinen die Zahl der Fertigfabrikate, die in einer ZE den Produktionsprozeß verlassen können, durch das Aggregat mit der längsten Bearbeitungszeit begrenzt wird.[1] Dementsprechend beträgt die maximale Ausbringungsmenge pro ZE für das erste Produkt 4 ME. In gleicher Weise müssen für die übrigen Erzeugnisse die Mengen ermittelt werden, die sich bei der jeweils längsten Fertigungszeit ergeben.

In dem vorliegenden Beispiel sind die Werte so gewählt, daß der Engpaß für sämtliche Produkte in der zweiten Bearbeitungsstufe auftritt. Damit werden durch diese Stufe die Mengen der einzelnen Erzeugnisse festgelegt, die in jedem möglichen Produktionszeitraum hergestellt werden können.

Steht z.B. nur eine Arbeitsstunde zur Verfügung, dann können von dem ersten Erzeugnis 3 ME produziert werden. Die Herstellungskosten setzen sich dabei aus den Rüst- und Bearbeitungskosten sämtlicher Fertigungsstufen zusammen.[2] Dementsprechend ergibt sich für das erste Produkt bei einer Arbeitsstunde ein Betrag von 176,50 DM. Diesen Kosten muß wieder der Erlös gegenübergestellt werden. Aufgrund der in Tabelle 45 angegebenen Preisabsatzfunktion beträgt der Preis für 3 ME 45,97 DM, so daß insgesamt ein Erlös von 137,91 DM erzielt werden kann.

Bei einer Produktionszeit von 2 ZE erhöht sich die Ausbringungsmenge um 4 ME. Die entsprechenden Kosten steigen um 162,- DM auf 338,50 DM, und der Erlös, der für 7 ME bestimmt werden muß, ergibt sich mit 321,51 DM.

---

1) Hierbei wird unterstellt, daß ein zeitlicher Verzug für den Produktionsbeginn der einzelnen Fertigungsstufen nicht auftritt, da er durch entsprechende Zwischenläger ausgeschaltet werden kann. Für das erste Erzeugnis werden z.B. auf der ersten Anlage 20 Minuten Rüstzeit und 10 Minuten Bearbeitungszeit und auf der zweiten Anlage 15 Minuten Rüstzeit und 15 Minuten Bearbeitungszeit benötigt. Demzufolge würde bei einem zeitlosen Übergang von einer Stufe zur anderen nur ein Halbfabrikat erforderlich sein, um die Produktion auf beiden Maschinen gleichzeitig beginnen zu können.

2) Würden z.B. Transportkosten anfallen, dann müßten diese Werte ebenfalls addiert werden.

Tabelle 46: Bestimmung der Kosten und Erlöse für 4 verschiedene Erzeugnisse in Abhängigkeit von der Fertigungszeit der Engpaßstufe.

Produkt / Stunden	1		2		3		4	
	Kosten	Erlös	Kosten	Erlös	Kosten	Erlös	Kosten	Erlös
1	176,50	137,91	159,00	119,86	121,00	71,95	179,00	83,92
5	824,50	870,39	819,00	912,06	633,00	644,11	811,00	749,52
10	1634,50	1778,79	1644,00	1885,44	1273,00	1350,67	1601,00	1567,12
15	2444,50	2679,19	2469,00	2840,06	1913,00	2047,63	2391,00	2368,72
20	3254,50	3571,59	3294,00	3775,94	2553,00	2734,99	3181,00	3154,32
25	4064,50	4455,99	4119,00	4693,06	3193,00	3412,75	3971,00	3923,92
30	4874,50	5332,39	4944,00	5591,44	3833,00	4080,91	4761,00	4677,52
35	5684,50	6200,79	5769,00	6471,06	4473,00	4739,47	5551,00	5415,12
40	6494,50	7061,19	6594,00	7331,94	5113,00	5388,43	6341,00	6136,72
42	6818,50	7403,11	6924,00	7671,04	5369,00	5645,33	6657,00	6420,88
45	7304,50	7913,59	7419,00	8174,06	5753,00	6027,79	7131,00	6842,32
47	7628,50	8252,31	7749,00	8505,66	6009,00	6280,85	7447,00	7120,08
50	8114,50	8757,99	8244,00	8997,44	6393,00	6657,55	7921,00	7531,92
51	8276,50	8925,91	8409,00	9159,86	6521,00	6782,35	8079,00	7667,92
55			9069,00	9802,06	7033,00	7277,71	8711,00	8205,52
60			9894,00	10587,94	7673,00	7888,27	9501,00	8863,12
65					8313,00	8489,23		
68					8697,00	8845,20		

In gleicher Weise müssen für jede mögliche Arbeitszeit die Kosten und Erlöse und die daraus resultierenden Deckungsbeiträge für sämtliche Erzeugnisse bestimmt werden. Die längste sinnvolle Fertigungszeit für ein Produkt wird dabei wieder durch die maximale Verkaufsmenge begrenzt. In der Tabelle 46 sind die entsprechenden Kosten und Erlöse und in der Tabelle 47 die Deckungsbeiträge der einzelnen Erzeugnisse angegeben.

Wie bereits oben gezeigt wurde, wird der in einem bestimmten Zeitraum maximal erzielbare Deckungsbeitrag eines Erzeugnisses durch den Engpaß der Fertigung determiniert. Da dieser Engpaß in dem vorliegenden Modell für alle Produkte in einer Bearbeitungsstufe auftritt, beziehen sich die oben ermittelten Deckungsbeiträge nur auf die Arbeitszeit dieser Fertigungsstufe, so daß sie unmittelbar miteinander verglichen werden können. Das bedeutet, daß der optimale Produktionsplan mit dem in Abschnitt 5.3.2 beschriebenen Iterationsverfahren aufgestellt werden kann.[1] Dementsprechend müssen wieder im ersten Planungsschritt die Deckungsbeiträge der Produkte 1 und 2 gegenübergestellt werden, um für jede mögliche Arbeitszeit die gewinnmaximale Fertigungsalternative bestimmen zu können. In den folgenden Optimierungsschritten wird dann die gleiche Berechnung für 3 und schließlich für 4 Erzeugnisse durchgeführt.

Für die hier gewählten Werte ergeben sich dabei die in der Tabelle 47 angegebenen maximalen Deckungsbeiträge. Die zugehörigen optimalen Fertigungszeiten der verschiedenen Produkte sind in der Tabelle 48 dargestellt.

Bezeichnet man die Engpaßstufe mit i und die Produktionszeit dieser Stufe mit PZ_i, dann gilt hier für die Bestimmung der relativen Optima - analog zu der in Abschnitt 5.3.2 aufgestellten Zielfunktion[2] - die Bedingung:

---

1) Vgl. S. 153 ff.
2) Vgl. S. 153

Tabelle 47: Bestimmung des maximalen Deckungsbeitrags in Abhängigkeit von der Produktionszeit der Engpaßstufe für 4 verschiedene Erzeugnisse.

Produkt / Stunden	1	2	1 bis 2	3	1 bis 3	4	1 bis 4
	DB	DB	Maximum des DB	DB	Maximum des DB	DB	Maximum des DB
1	- 38,59	- 39,14	- 38,59	- 49,05	- 38,59	- 95,08	- 38,59
5	45,89	93,06	93,06	11,11	93,06	- 61,48	93,06
10	144,29	241,44	241,44	77,67	241,44	- 33,88	241,44
15	234,69	371,06	371,06	134,63	371,06	- 22,28	371,06
20	317,09	481,94	481,94	181,99	481,94	- 26,68	481,94
25	391,49	574,06	574,06	219,75	574,06	- 47,08	574,06
30	457,89	647,44	647,44	247,91	647,44	- 83,48	647,44
35	516,29	702,06	702,06	266,47	720,87	- 135,88	720,87
40	566,69	737,94	808,95	275,43	808,95	- 204,28	808,95
42	584,61	747,04	842,67	276,33	842,67	- 236,12	842,67
45	609,09	755,06	891,49	274,79	891,49	- 288,68	891,49
47	623,81	756,66	922,85	271,85	922,85	- 326,92	922,85
50	643,49	753,44	968,35	264,55	968,35	- 389,08	968,35
51	649,41	750,86	983,03	261,35	983,03	- 411,08	983,03
55		733,06	1039,67	244,71	1039,67	- 505,48	1039,67
60		693,94	1105,33	215,27	1105,33	- 637,88	1105,33
65			1165,43	176,23	1165,43		1165,43
68			1198,75	148,20	1198,75		1198,75
70			1219,87		1219,87		1219,87
75			1268,75		1268,75		1268,75
80			1311,99		1311,99		1311,99
85			1349,65		1354,51		1354,51
90			1381,67		1404,62		1404,62
95			1402,55		1451,16		1451,16
98			1406,07		1477,34		1477,34
100			1404,67		1494,14		1494,14
105			1388,05		1533,55		1533,55
110			1352,67		1569,50		1569,50
115					1601,91		1601,91
120					1630,40		1630,40
125					1652,94		1652,94
130					1669,02		1669,02
135					1678,88		1678,88
140					1682,40		1682,40
145					1679,47		1679,47
150					1670,22		1670,22
155					1654,72		1660,27
160					1632,76		1659,32

Tabelle 48: Bestimmung der optimalen Fertigungszeit in der Engpaßstufe für 4 verschiedene Erzeugnisse.

Stunden	optimale Produktionszeit für die Produkte					
	1	2	1 bis 2	3	1 bis 3	4
1	1	o	1	o	1	o
5	o	5	5	o	5	o
1o	o	1o	1o	o	1o	o
15	o	15	15	o	15	o
2o	o	2o	2o	o	2o	o
25	o	25	25	o	25	o
3o	o	3o	3o	o	3o	o
35	12	23	35	o	35	o
4o	16	24	4o	o	4o	o
42	17	25	42	o	42	o
45	19	26	45	o	45	o
47	21	26	47	o	47	o
5o	23	27	5o	o	5o	o
51	23	28	51	o	51	o
55	26	29	55	o	55	o
6o	3o	3o	6o	o	6o	o
65	33	32	65	o	65	o
68	35	33	68	o	68	o
7o	37	33	7o	o	7o	o
75	4o	35	75	o	75	o
8o	44	36	8o	o	8o	o
85	47	38	7o	15	85	o
9o	51	39	73	17	9o	o
95	51	44	76	19	95	o
98	51	47	78	2o	98	o
1oo	51	49	79	21	1oo	o
1o5	51	54	82	23	1o5	o
11o	51	59	86	24	11o	o
115			89	26	115	o
12o			91	29	12o	o
125			93	32	125	o
13o			95	35	13o	o
135			96	39	135	o
14o			98	42	14o	o
145			1oo	45	145	o
15o			1o1	49	15o	o
155			1o3	52	139	16
16o			1o5	55	143	17

$$(54.1) \quad F_j(PZ_i) = \max_{PZ_{ij}} \left[DB\,(PZ_{ij}) + F_{j-1}(PZ_i - PZ_{ij}) \right]$$

Die gewinnmaximale Lösung wird wieder durch den im letzten Iterationsschritt ermittelten größten Deckungsbeitrag determiniert. Dabei ergibt sich in dem vorliegenden Modell ein Wert von 1.682,40 DM bei einer Produktionszeit von 140 ZE. Für diesen Zeitraum müssen nach dem bereits erläuterten Verfahren[1)] die optimalen Produktionszeiten der einzelnen Erzeugnisse bestimmt werden. Die Ergebnisse können dann durch die eingangs genannten Rüst- und Bearbeitungszeiten wieder in ME umgerechnet werden.

In der Tabelle 49 sind die optimalen Fertigungszeiten, die entsprechenden Produktionsmengen und die jeweils geltenden Preise der verschiedenen Erzeugnisse angegeben.

Tabelle 49: Bestimmung der gewinnmaximalen Fertigungsmengen und Preise der verschiedenen Produkte.

Produkt	optimale Produktionszeiten in Stunden	optimale Fertigungsmenge	gewinnmaximaler Preis in DM
1	51	203	43,97
2	47	233	36,505
3	42	166	34,008
4	0	0	0

Um den Gewinn maximieren zu können, müssen also in jeder Fertigungsstufe die hier ermittelten Produktionsmengen bearbeitet werden. Dabei kann man die optimalen Lose in einer beliebigen Reihenfolge - die jedoch für jedes Aggregat gleich sein muß - auflegen, so daß auch hier eventuell eine Koordinierung mit auftretenden Lieferterminen realisierbar ist.

1) Vgl. S. 161

Die dynamische Programmierung liefert nicht nur die gewinnmaximale Lösung, sondern für jede mögliche Arbeitszeit die optimalen Mengen der einzelnen Erzeugnisse. Dadurch kann z.B. auch die vorteilhafteste Produktionszeitaufteilung für die gesamte verfügbare Fertigungszeit der Engpaßstufe angegeben werden.

Ebenso wie im dritten Modell können auch hier Ausschußfaktoren berücksichtigt werden. Darüber hinaus kann man die Optimierung für eine beliebige Zahl von Erzeugnissen und Produktionsstufen durchführen.

Der Nachteil des beschriebenen Modells besteht darin, daß vorhandene Engpässe nur in einer Bearbeitungsstufe auftreten dürfen. Außerdem wird der Anwendungsbereich dadurch eingeengt, daß in jeder Fertigungsstufe nur ein Aggregat in die Planung einbezogen wird. Kostenänderungen, die z.B. durch Überstundenzuschläge oder intensitätsmäßige Anpassungen hervorgerufen werden, können nur unter bestimmten Voraussetzungen erfaßt werden.

Damit wird deutlich, daß auch in diesem Modell nicht sämtliche Einflußfaktoren der Produktionsplanung simultan berücksichtigt werden können.

Die gegenwärtig vorliegenden Lösungsansätze der dynamischen Programmierung beschränken sich auf Teilbereiche der Fertigungsplanung. Eine simultane Totalplanung ist mit dieser Methode - ebenso wie mit den anderen bisher bekannten mathematischen Verfahren - nicht möglich.

Dennoch muß die dynamische Programmierung als ein wirkungsvolles Planungsinstrument angesehen werden, da sie an wenige Voraussetzungen gebunden ist und sich für die Optimierung komplexer Systeme besonders gut eignet.

6 Zusammenfassung

Mit dieser Zusammenfassung soll eine Untersuchung zu Ende geführt werden, deren Anliegen es war, einige Anwendungsmöglichkeiten der dynamischen Programmierung zur Lösung von Planungsproblemen im Bereich der Leistungserstellung aufzuzeigen. Zunächst wurden die Elemente einer Planung - die Zielvorstellung, der Entscheidungsraum und die Aktionsparameter - herausgearbeitet. Im zweiten Abschnitt folgte eine kurze Charakterisierung der wichtigsten Determinanten der Produktionsplanung und eine Abgrenzung der für diese Arbeit relevanten Einflußfaktoren. Anschließend wurde das von Bellman entwickelte Optimierungsprinzip der dynamischen Programmierung erläutert und anhand von ausgewählten Beispielen der Literatur diskutiert. Dabei zeigte sich, daß für jede Planungsaufgabe zunächst ein Algorithmus aufgestellt werden muß, der den Voraussetzungen der dynamischen Programmierung genügt. Durch das von Landau angegebene Iterationsverfahren wurde deutlich, daß auch mehrere Algorithmen für ein bestimmtes Problem existieren können, die mit unterschiedlichem Rechenaufwand zum gleichen Ergebnis führen. Während Landau diesen Nachweis für das von Shephard entwickelte Modell erbrachte, wurde in der vorliegenden Arbeit mit dem gleichen Algorithmus die Lösung für das Modell von Elsner bestimmt. Daraus resultiert die Erkenntnis, daß eine wesentliche Aufgabe der Planungsarbeit darin besteht, für eine gegebene Situation zunächst das vorteilhafteste Iterationsverfahren festzulegen.

Die Auswahl der in Abschnitt 4 angegebenen Modelle erfolgte unter dem Gesichtspunkt, für entscheidende Probleme der Produktionsplanung die bisher bekannten Lösungsansätze der dynamischen Programmierung darzustellen. Dabei zeigte sich, daß in sämtlichen Beispielen die Kostenminimierung oder die Bestimmung der kürzesten Durchlaufzeit als Planungsziele auftreten.

Eine Gewinn- bzw. Deckungsbeitragsmaximierung wurde nicht berücksichtigt. Ebenso beschränken sich die Untersuchungen grundsätzlich auf einen Einproduktbetrieb mit einstufiger Fertigung. Lediglich das in Abschnitt 4.3 angegebene Modell gestattet eine isolierte Optimierung für ein Reihenfolgeproblem.

Deshalb wurde in dieser Arbeit der Versuch unternommen, durch eine Erweiterung der bisher bekannten Lösungsansätze einerseits die Gewinnmaximierung als Zielfunktion zugrunde zu legen und andererseits für mehrstufige Fertigungsprozesse sowie für Mehrproduktunternehmungen eine optimale Entscheidung mit Hilfe der dynamischen Programmierung realisieren zu können. In den Modellen 1 und 2 des Abschnittes 5 wurde eine gewinnmaximale Lösung für ein- und mehrstufige Einproduktbetriebe bestimmt, wobei zeitliche, intensitätsmäßige und quantitative Anpassungen simultan berücksicht werden konnten. Außerdem gelang es, den erwarteten Ausschuß der Produktion in die Planung einzubeziehen. Darüber hinaus wurde gezeigt, daß diese Modelle durch den von Shephard und Elsner entwickelten Algorithmus auch für langfristige Planungsprobleme eingesetzt werden können.

Die letzten beiden Modelle des fünften Abschnittes befassen sich mit ein- und mehrstufigen Fertigungsprozessen bei Mehrproduktunternehmungen. Dabei konnte mit dem angewendeten Algorithmus der Deckungsbeitrag pro Arbeitszeit maximiert werden, so daß die Programmweite und die Produktionsmengen der einzelnen Erzeugnisse für die gewinnmaximale Lösung eindeutig determiniert wurden.

Mit diesen Modellen sollte verdeutlicht werden, daß die dynamische Programmierung durch eine Weiterentwicklung der bisher bekannten Lösungsansätze auch anderen Problemen der Fertigungsplanung zugänglich gemacht werden kann.

Symbolverzeichnis

a	=	Diskontierungsfaktor
B	=	Bedarf
BK	=	kumulierter Bedarf
DB	=	Deckungsbeitrag
E	=	Erlös
E′	=	Grenzerlös
EW	=	Erwartungswert
EK	=	erwartete Kosten
G	=	Gewinn
GE	=	Geldeinheit
K	=	Kosten
Kv	=	variable Kosten
kv	=	variable Stückkosten
K′	=	Grenzkosten
K_L	=	variable Lagerkosten
K_p	=	variable Produktionsko
K_R	=	Rüstkosten
L	=	Lagerbestand
ME	=	Mengeneinheit
P	=	Preis
p	=	Prozentsatz
PZ	=	Produktionszeit
q	=	Faktorpreis
r	=	Faktor
u	=	Übergang
x	=	Produktionsmenge
z	=	Zustand

A N H A N G

Abbildung 1*: Flußdiagramm für die Modelle 1 und 2.

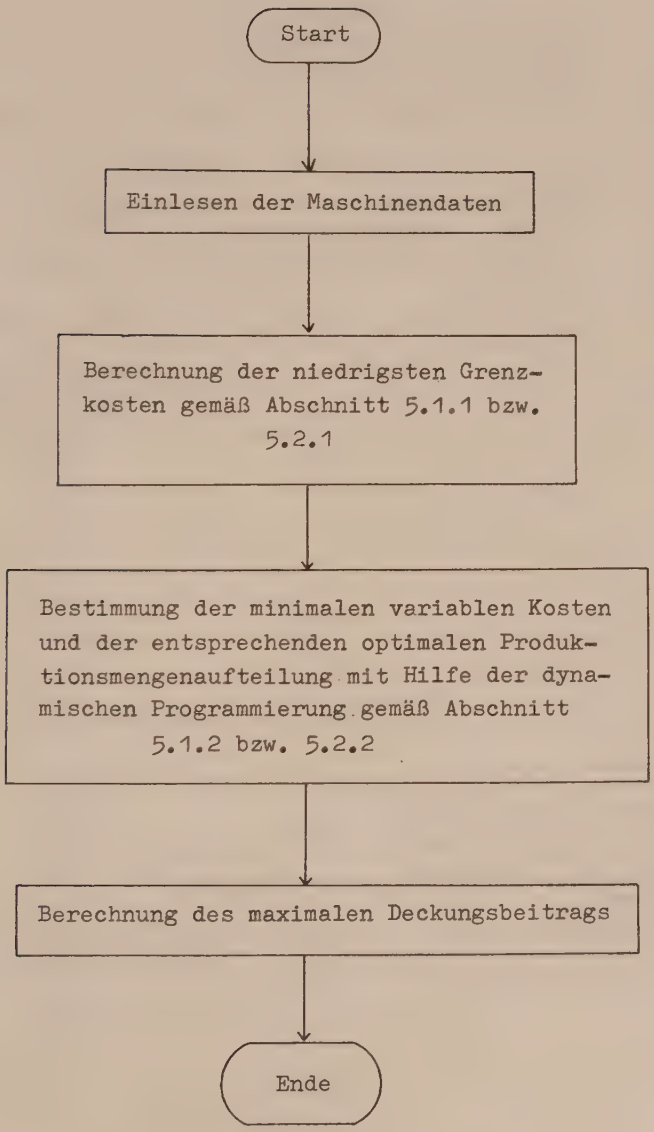


Tabelle 1*: FORTRAN IV-Programm zum 2. Modell (vgl. Abschnitt 5.2).

```
C M          : ANZAHL DER MASCHINEN
C NOKT       : NORMALKAPAZITAET PRO TAG IN MINUTEN
C IANZT      : ANZAHL DER ARBEITSTAGE PRO MONAT
C KAPU       : UEBERSTUNDENKAPAZITAET PRO TAG IN MINUTEN
C IBAZ(I)    : BEARBEITUNGSZEIT AUF DER MASCHINE I IN MINUTEN
C VKMIN(I)   : VARIABLE PRODUKTIONSKOSTEN AUF DER MASCHINE I PRO MINUTE
C VKSTU(I)   : ANSTIEG DER VARIABLEN KOSTEN WAEHREND DER UEBERSTUNDE IN
C              PROZENT
C MOIKAP(I)  : MAXIMALE INTENSITAETSSTEIGERUNG PRO MONAT IN STUECK
C FAINT(I)   : ANSTIEG DER GRENZKOSTEN BEI INTENSITAETSMAESSIGER ANPAS-
C              SUNG
C FKINT(I)   : KONSTANTE KOSTEN BEI INTENSITAETSMAESSIGER ANPASSUNG
C VKST(I)    : VARIABLE STUECKKOSTEN BEI NORMALER ARBEITSZEIT
C VKU(I)     : VARIABLE STUECKKOSTEN BEI UEBERSTUNDEN
C VKSTD(I)   : VARIABLE KOSTEN PRO STUNDE BEI NORMALER ARBEITSZEIT
C MOKAP(I)   : NORMALKAPAZITAET PRO MONAT IN STUECK
C MOUKAP(I)  : UEBERSTUNDENKAPAZITAET PRO MONAT IN STUECK
C MOGKAP(I)  : NORMAL- UND UEBERSTUNDENKAPAZITAET PRO MONAT IN STUECK
C MAXKAP(I)  : MAXIMALE KAPAZITAET PRO MONAT IN STUECK
C
      REAL VKMIN(6),FAINT(6),FKINT(6),VKST(6),VKU(6),VKSTU(6),VKSTD(6)
      REAL*8 A(2000),B(11,200),C(40),A1(2000),D(200),D1(200),AUSSCH(6)
      REAL*8 X1
      INTEGER IBAZ(6),IA(6),MOKAP(6),MOGKAP(6),MOUKAP(6),MOIKAP(6)
      INTEGER MAXKAP(6),IB(10,200),IC(6)
C
C
C EINLESEN DER MASCHINENDATEN
C
      READ(5,101)NOKT,IANZT,KAPU
  101 FORMAT(10X,3I5)
      DO 64 I=1,200
      D(I)=0.
   64 CONTINUE
      DO 60 IXA=1,3
      READ(5,100) M
  100 FORMAT(10X,I5)
      DO 1 I=1,M
      READ(5,102) IBAZ(I),VKMIN(I),VKSTU(I),MOIKAP(I),FAINT(I),FKINT(I)
  102 FORMAT(10X,I5,2F5.2,I5,2F5.1)
      IA(I)=I
      VKST(I)=IBAZ(I)*VKMIN(I)
      VKU(I)=VKST(I)*(1.+VKSTU(I))
      MOKAP(I)=NOKT*IANZT/IBAZ(I)
      MOGKAP(I)=MOKAP(I)+KAPU*IANZT/IBAZ(I)
      MOUKAP(I)=MOGKAP(I)-MOKAP(I)
      VKSTD(I)=VKMIN(I)*60.
      MAXKAP(I)=MOGKAP(I)+MOIKAP(I)
    1  CONTINUE
      WRITE(6,103)
  103 FORMAT('1',T2,'MASCHINE BEARB.ZEIT KV/MIN   KV/STD   KV/STUECK
     *KV-ANSTIEG  KV/UEBSTD UEBSTD  MAXINT.  INTFAKTOR  NORMKAP  +UEBS
     *D  +INTST'/T54,'UEBSTD'///)
      DO 2 I=1,M
```

```
      WRITE(6,104)IA(I),IBAZ(I),VKMIN(I),VKSTO(I),VKST(I),VKSTU(I),VKU(I
     *),MOUKAP(I),MOIKAP(I),FAINT(I),FKINT(I),MOKAP(I),MOGKAP(I),MAXKAP(
     *I)
  104 FORMAT('0',T2,I7,3X,I7,4F10.2,4X,F10.2,2I7,F9.2,'+',F5.2,I6,2I10)
    2 CONTINUE
C
C
C BERECHNUNG DER NIEDRIGSTEN GRENZKOSTEN GEMAESS ABSCHNITT 5.1.1 BZW.
C 5.2.1
C
      WRITE(6,112)
  112 FORMAT('1',T2,'TABELLE DER GRENZKOSTEN VON DER NORMAL- BIS ZUR MAX
     *IMALKAPAZITAET'////)
      L1=0
      DO 3 I=1,M
      L=MOKAP(I)
      DO 4 J=1,L
      A(J)=VKST(I)
    4 CONTINUE
      I1=0
      IA1=MOIKAP(I)
      IF(IA1.GT.0) GOTO 23
      IA2=MOUKAP(I)
      IF(IA2.EQ.0)GOTO 25
      DO 24 J=1,IA2
      L=L+1
      A(L)=VKU(I)
   24 CONTINUE
      GOTO 25
   23 DO 5 J=1,IA1
      C(J)=FAINT(I)*J**2+FKINT(I)+VKST(I)
      IF(C(J)-VKU(I)) 10,10,11
   11 I1=I1+1
      IF(I1-MOUKAP(I))12,12,10
   12 L=L+1
      A(L)=VKU(I)
      GOTO 11
   10 L=L+1
      A(L)=C(J)
    5 CONTINUE
   25 CONTINUE
      L=L+1
      DO 6 J=L,2000
      A(J)=200.
    6 CONTINUE
      I4=MOKAP(I)
      I5=MAXKAP(I)
      WRITE(6,113)I,I4,I5
  113 FORMAT('0',T2,'MASCHINE:',I10//T2,'VON DER NORMALKAPAZITAET=',I6,2
     *X,'  STUECK   BIS ZUR MAXIMALKAPAZITAET=',I6,2X,'  STUECK'///)
      WRITE(6,105)  (A(J),J=I4,I5)
  105  FORMAT(T2,   (T10,10F10.2))
      L1=L1+1
      IF(L1.LT.3)GOTO 9
      L1=L1+1
    9 DO 7 J=1,200
      B(L1,J)=0.
      LX1=J*10
```

```
      LX2=LX1-9
      DO 8 L= LX2,LX1
      B(L1,J)=A(L)+B(L1,J)
 8    CONTINUE
 7    CONTINUE
  3   CONTINUE
      WRITE(6,114)
 114  FORMAT('1',T2,'TABELLE DER VARIABLEN KOSTEN JE 10 STUECK:'////)
      WRITE(6,116)
 116  FORMAT('0',T2,'MASCHINE',10X,'1',10X,'2',10X,'3',10X,'4',10X,'5',1
     *0X,'6'//T2,'STUECK:'///)
      DO 30 J=1,200
      L2=10*J
      L6=(M-1)*2
      WRITE(6,115)L2,B(1,J),(B(I,J),I=2,L6,2)
 115  FORMAT(    T2,I5,4X,6F11.2)
 30   CONTINUE
C
C
C BESTIMMUNG DER MINIMALEN VARIABLEN KOSTEN UND DER ENTSPRECHENDEN OPTI-
C MALEN PRODUKTIONSMENGENAUFTEILUNG MIT HILFE DER DYNAMISCHEN PROGRAM-
C MIERUNG GEMAESS ABSCHNITT 5.1.2 BZW. 5.2.2
C
      L1=0
      DO 27 IX =  1,M
      L1=L1+1
      IF(L1.LT.3) GOTO 28
      L1=L1+1
 29   DO 26 J=2,200
       B(L1,J)=B(L1,J)+B(L1,J-1)
 26   CONTINUE
 27   CONTINUE
      I10=MAXKAP(1)/10
      I10=I10*10
      I9=0
      DO 13 I=2,L6,2
      I9=I9+1
      I6=MAXKAP(I9)/10
      I7=MAXKAP(I9+1)/10
      I6=I6*10
      I7=I7*10
      I10=I10+17
      DO 14 J=1,200
      I8=J*10
      IF(IDINT(B(I-1,J)*100)-IDINT(B(I,J)*100))15,15,16
 15   B(I+1,J)=B(I-1,J)
      IB(I-1,J)=J *10
      IB(I  ,J)=0
      GOTO 17
 16   B(I+1,J)=B(I,J)
      IB(I,J)=J*10
      IB(I-1,J)=0
 17   IF(J-1)50,50,18
 18   MI=J-1
      DO 19 L=1,MI
      X1=B(I-1,J-L)+B(I,L)
      IF(IDINT(B(I+1,J)*100).LE.IDINT(X1*100)) GOTO 19
      B(I+1,J)=X1
```

```
      I8(I,J)=L*10
      I8(I-1,J)=(J-L)*10
   19 CONTINUE
   50 CONTINUE
      IF(I8.LE.I10)GOTO51
      I8(I-1,J)=I10-I7
      I8(I,J)=I7
   51 CONTINUE
   14 CONTINUE
   13 CONTINUE
      DO 65 I=1,200
      D(I)=D(I)+B(L6+1,I)
   65 CONTINUE
      WRITE(6,108)
  108 FORMAT('1',T2,'TABELLE DER NIEDRIGSTEN VARIABLEN KOSTEN:'////)
      WRITE(6,106)
  106 FORMAT('0',T2,'MASCHINE',T17,'1',T27,'2',T37,'1-2',T47,'3',T57,'1-
     *3',T67,'4',T77,'1-4'T87,'5',T97,'1-5',T107,'6',T117,'1-6'//T2,'STU
     *ECK'//)
      DO 20 J=1,200
      L2=J*10
      L7=L6+1
      WRITE(6,107)L2,(B(I,J),I=1,L7)
  107 FORMAT(T2,I5,3X,11F10.2)
   20 CONTINUE
      WRITE(6,109)
  109 FORMAT('1',T2,'TABELLE DER OPTIMALEN PRODUKTIONSMENGENAUFTEILUNG:'
     *////)
      WRITE(6,110)
  110 FORMAT('0',T2,'MASCHINE',T17,'1',T27,'2',T37,'1-2',T47,'3',T57,'1-
     *3',T67,'4',T77,'1-4'T87,'5',T97,'1-5',T107,'6'//T2,'STUECK'//)
      DO 21 J=1,200
      L2=J*10
      WRITE(6,111)L2,(I8(I,J) ,I=1,L6)
  111 FORMAT(T2,I5,3X,10I10)
   21 CONTINUE
   60 CONTINUE
      WRITE(6,117)
  117 FORMAT('1',T2,'DIE NIEDRIGSTEN PRODUKTIONSKOSTEN FUER ALLE STUFEN:
     *'///T8,'MENGE  VAR.KOSTEN'///)
      DO 66 I=1,20
      J=I*100
      JA8= I*10
      WRITE(6,122)J,D(JA8)
  122 FORMAT(T2,I10,F10.2)
   66 CONTINUE
C
C
C BERECHNUNG DES MAXIMALEN DECKUNGSBEITRAGS
C
      READ(5,125)PREIS1,PREIS2,DIF
  125 FORMAT(10X,3F10.2)
      WRITE(6,128)
  128 FORMAT('1',T2,'TABELLE DER DECKUNGSBEITRAEGE'///)
      WRITE(6,129)
  129 FORMAT(T6,'MENGE     KOSTEN     PREIS 1   UMSATZ 1   DECKUNGSBEITR
     *AG 1  PREIS 2   UMSATZ 2  DECKUNGSBEITRAG 2'///)
      DO 70 I=1,200
```

```
      L=I*10
      U=PREIS1*L
      PREIS3=PREIS2-DIF*L
      U1=PREIS3*L
      DBT=U-D(I)
      DBT1=U1-D(I)
      WRITE(6,127)L,D(I)    ,PREIS1,U,DBT,PREIS3,U1,DBT1
127   FORMAT(T6,I5,3F11.2,5X,       3F12.2, 5X,F12.2)
70    CONTINUE
      STOP
      END
```

Abbildung 2*: Flußdiagramm für die Modelle 3 und 4.

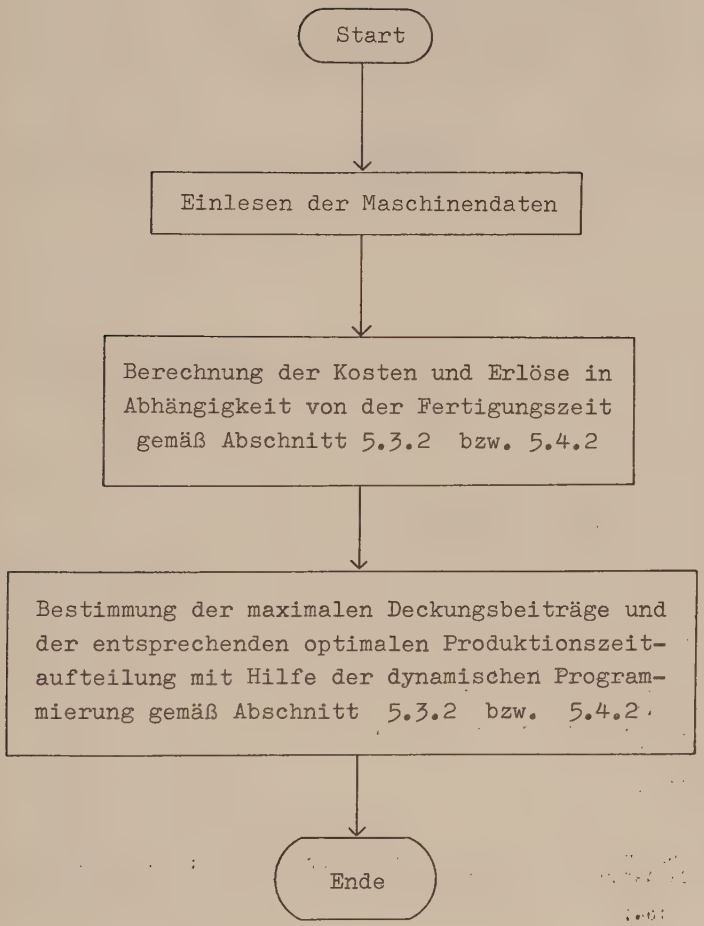


Tabelle 2*: FORTRAN IV-Programm zum 4. Modell (vgl. Abschnitt 5.4).

```
C M          : ANZAHL DER PRODUKTE
C IRZ(I)     : RUESTZEIT FUER DAS PRODUKT I
C RK(I)      : RUESTKOSTEN FUER DAS PRODUKT I
C IFZ(I)     : FERTIGUNGSZEIT FUER DAS PRODUKT I IN MINUTEN
C IFM(I)     : FERTIGUNGSMENGE DES PRODUKTES I PRO STUNDE
C VKSTCK(I)  : VARIABLE PRODUKTIONSKOSTEN PRO STUECK
C VKSTD(I)   : VARIABLE PRODUKTIONSKOSTEN PRO STUNDE
C MAXVER(I)  : MAXIMALE VERKAUFSMENGE DES PRODUKTES I
C MAXPRZ(I)  : ERFORDERLICHE PRODUKTIONSZEIT IN STUNDEN FUER DIE MAXIMALE
C              VERKAUFSMENGE DES PRODUKTES I
C
      INTEGER LO(4,3),          IG(4),IFZ(4,3)
      INTEGER IRZ(4,3),IFM(4,3),MAXVER(4)  ,MAXPRZ(4,3),IB(6,180),IC(4)
      REAL B1(180,3),B2(180,3),B3(100,3)
      REAL RK(4,3),VKSTCK(4,3),VKSTD(4,3),PREIS(4),P(4,3)
      REAL *8 B(8,300),X1
C
C
C EINLESEN DER MASCHINENDATEN
C
      READ(5,100)N,M
  100 FORMAT(10X,2I10)
      WRITE(6,102)
  102 FORMAT('1',T6,'PRODUKT BEAR.ZEIT PROD.MENGE RUESTZEIT RUESTKOSTEN
     * VK/STUECK VK/STUNDE              MAXIMALE VERKAUFSMENGE'/T25,'PRO
     *STD',T88,'IN STUECK  IN PROD.STUNDEN'///)
      DO 17 J=1,N
      WRITE(6,110)J
  110 FORMAT(///T5,'STUFE:',I5//)
      DO 1 I=1,M
      READ(5,101)IRZ(I,J),RK(I,J),IFM(I,J),VKSTCK(I,J),MAXVER(I)
  101 FORMAT(T2,I9,F10.2,I10, F10.2,I10)
      VKSTD(I,J)= VKSTCK(I,J)*IFM(I,J)
      MAXPRZ(I,J)=MAXVER(I)/IFM(I,J)+1.
      IFZ(I,J)=60/IFM(I,J)+0.5
      WRITE(6,103)I,IFZ(I,J),IFM(I,J),IRZ(I,J),RK(I,J),VKSTCK(I,J),VKSTD
     *(I,J),MAXVER(I),MAXPRZ(I,J)
  103 FORMAT(4I10,3X,3F10.2,13X,2I10)
    1 CONTINUE
   17 CONTINUE
      READ(5,109)(PREIS(I),I=1,M)
  109 FORMAT(10X,4F10.2)
      WRITE(6,113)
  113 FORMAT(///T2,'PRODUKT   PREIS'///)
      DO 27 I=1,M
      WRITE(6,111)I,PREIS(I)
  111 FORMAT(T4,I3,F10.2)
   27 CONTINUE
C
C
C BERECHNUNG DER KOSTEN UND ERLOESE IN ABHAENGIGKEIT VON DER FERTIGUNGS-
C ZEIT GEMAESS ABSCHNITT 5.3.2 BZW. 5.4.2
C
      WRITE(6,104)
```

```
104   FORMAT('1',T2,'TABELLE DER STUECKKOSTEN FUER ALLE STUFEN:'///
     *T2,'PRODUKT:',T20,'1',T30,'2',T40,'3',T50,'4'// T2,'MENGE'///)
      DO 19 I=1,300
      DO 20 J=1,8
      B(J,I)=0.
20    CONTINUE
19    CONTINUE
      L1=1
      DO 21 I=1,M
      L=MAXVER(I)
      DO 22 J=1,L
      DO 23 JA=1,N
      B(L1,J)=VKSTCK(I,JA)+B(L1,J)+RK(I,JA)/J
23    CONTINUE
22    CONTINUE
      L1=L1+2
21    CONTINUE
      DO 5 J=1,300
      WRITE(6,105)J,(B(I,J),I=1,7,2)
105   FORMAT(I10,3X,(8F10.2))
5     CONTINUE
      DO 18 J=1,M
      IC(J)=1
      LO(J,1)=(60-IRZ(J,1))/IFZ(J,1)+0.5
      DO 24 I=2,N
      LO(J,I)=(60-IRZ(J,I))/IFZ(J,I)+0.5
      IF(IFM(J,I).GE.IFM(J,I-1)) GOTO 24
      IC(J)=I
24    CONTINUE
18    CONTINUE
      WRITE(6,112)
112   FORMAT('1',T2,'TABELLE DER VARIABLEN KOSTEN UND UMSAETZE'///T2,'PR
     *ODUKT:',T26,'1',T47,'2',T67,'3',T87,'4'///T2,'STUNDEN',T17,'KOSTEN
     *     UMSATZ    KOSTEN    UMSATZ    KOSTEN    UMSATZ    KOSTEN    U
     *MSATZ'///)
      DO 29 I=1,M
      DO 28 J=2,N
      RK(I,1)=RK(I,1)+RK(I,J)
      VKSTCK(I,1)=VKSTCK(I,1)+VKSTCK(I,J)
28    CONTINUE
29    CONTINUE
      L1=0
      DO 25 I=1,M
      L1=L1+2
      ID=IC(I)
      L=MAXPRZ(I,ID)
      L2=(60-IRZ(I,ID))/IFZ(I,ID)+0.5
      B(L1,1)=PREIS(I)*L2
      B(L1-1,1)=RK(I,1)+VKSTCK(I,1)*L2
      DO 3 J=2,L
      L2=L2+IFM(I,ID)
      B(L1-1,J)=RK(I,1)+VKSTCK(I,1)*L2
      B(L1,J)=PREIS(I)*L2
3     CONTINUE
      L3=L+1
      DO 4 J=L3,180
      B(L1-1,J)=0
      B(L1,J)=0.
```

```
 4     CONTINUE
 25    CONTINUE
       DO 26 J=1,180
       WRITE(6,105)J,(B(I,J),I=1,8)
       B(2, J)=B(2,J)-B(1,J)
       B(1,J)=0.
       DO 38 JX=1,N
       B1(J,JX)=0.
       B2(J,JX)=0.
 38    CONTINUE
       DO 6 I  =3,8,2
       B(I,J)=B(I+1,J)-B(I,J)
       B(I+1,J)=0.
 6     CONTINUE
 26    CONTINUE
       L1=1
       DO 50 I=1,M
       L1=L1+1
       LZ=MAXPRZ(I,IC(I))+1
       IF(I.GT.2) L1=L1+1
       DO 51 J=LZ,180
       B(L1,J)=-10000.
 51    CONTINUE
 50    CONTINUE
C
C
C BESTIMMUNG DER MAXIMALEN DECKUNGSBEITRAEGE UND DER ENTSPRECHENDEN
C OPTIMALEN PRODUKTIONSZEITAUFTEILUNG MIT HILFE DER DYNAMISCHEN PROGRAM-
C MIERUNG GEMAESS ABSCHNITT 5.3.2 BZW. 5.4.2
C
       WRITE(6,106)
 106   FORMAT('1',T2,'TABELLE DER DECKUNGSBEITRAEGE:'//T2,'PRODUKT',T20,'
      *1',T30,'2',T39,'1-2',T50,'3',T59,'1-3',T70,'4',T79,'1-4'//T2,'STUN
      *DEN'///)
       L1=0
       LZ=MAXPRZ(1,IC(1))
       LZ1=1
       DO  31 JX=2,LZ
       LXY=(JX-1)*IFM(LZ1,IC(LZ1))+LO(LZ1,IC(LZ1))+0.5
       DO 32 JY=1,N
        P(LZ1,JY)=FLOAT((LXY-LO(LZ1,JY)))/FLOAT(IFM(LZ1,JY))+1.
        B1(1,JY)=1.
        B1(JX,JY)= P(LZ1,JY)
 32    CONTINUE
 31    CONTINUE
       DO  7 I =3,7,2
       L1=L1+2
       LZ1=LZ1+1
       LZ2=MAXPRZ(LZ1,IC(LZ1))
       LZ=LZ+MAXPRZ(LZ1,IC(LZ1))
       DO 33 JX=2,LZ2
       LXY=(JX-1)*IFM(LZ1,IC(LZ1))+LO(LZ1,IC(LZ1))+0.5
       DO 34 JY=1,N
        B3(1,JY)=1.
        P(LZ1,JY)=FLOAT((LXY-LO(LZ1,JY)))/FLOAT(IFM(LZ1,JY))+1.
        B3(JX,JY)= P(LZ1,JY)
 34    CONTINUE
 33    CONTINUE
```

```
      DO 11 J=1,180
      IF(IDINT(B(I-1,J)*100)-IDINT(B(I,J)*100)) 8,9,9
8     B(I+1,J)=B(I,J)
      IB(L1,J)=J
      IB(L1-1,J)=0
      GOTO 10
9     B(I+1,J)=B(I-1,J)
      IB(L1,J)=0
      IB(L1-1,J)=J
10    CONTINUE
      IF(J.LE.LZ)GOTO 30
      B(I+1,J)=-10000.
      IB(L1,J)=0
      IB(L1-1,J)=0
      GOTO 11
30    IF(J-1) 42,42,13
13    M1=J-1
      DO 14 L=1,M1
      X1=B(L1,J-L)+B(I,L)
      IF(IDINT(B(I+1,J)*100).GE.IDINT(X1*100)) GOTO 14
      B(I+1,J)=X1
      IB(L1-1,J)=J-L
      IB(L1,J)=L
14    CONTINUE
42    CONTINUE
      IF(IB(L1,J).LE.0) GOTO 36
      DO 39 JX=1,N
       B2(J,JX)= B3(IB(L1,J),JX)
39    CONTINUE
36    IF(IB(L1-1,J).LE.0) GOTO 37
      DO 40 JX=1,N
       B2(J,JX)= B1(IB(L1-1,J),JX)+ B2(J,JX)
40    CONTINUE
37    CONTINUE
      DO 45 JX=1,N
      IF( B2(J,JX).LE.160.) GOTO 45
      B2(J,1)=0.
      B2(J,2)=0.
      B2(J,3)=0.
      IB(L1-1,J)=0
      IB(L1,J)=0
      B(I+1,J)=0.
45    CONTINUE
11    CONTINUE
      DO 43 J=1,180
      DO 44 JX=1,N
       B1(J,JX)= B2(J,JX)
       B2(J,JX)=0.
      IF(J.GT.LZ2) GOTO 44
       B3(J,JX)=0.
44    CONTINUE
43    CONTINUE
7     CONTINUE
      LX=0
      LZ=0
      L1=1
      LZ1=1
      DO 52 I=2,8
```

```
      IF(LX.EQ.1) GOTO 56
      LZ=MAXPRZ(LZ1,IC(LZ1))+L1
      LX=1
      L1=LZ
      LZ1=LZ1+1
      GOTO 55
56    LZ=MAXPRZ(LZ1,IC(LZ1))+1
      LX=0
55    IF(LZ.GT.180) GOTO 52
      DO 53 J=LZ,180
      B(I,J)=0.
53    CONTINUE
52    CONTINUE
      DO 15 J=1,180
      WRITE(6,105)J,(B(I,J),I=2,8)
15    CONTINUE
      DO 35 I=1,N
      IG(I)=I
35    CONTINUE
      WRITE(6,114)(IG(I),I=1,N)
114   FORMAT('1',T2,'DIE STUNDENBELASTUNG DER STUFEN BEI MAXIMALER AUSNU
     *TZUNG DER KAPAZITAET:'//T2,'STUFE:',14X,3I10//T17,'STUNDEN'//)
      DO 70 I=1,180
      WRITE(6,115)I,( B1(I,J),J=1,N)
115   FORMAT(11X,I10,3F10.2)
70    CONTINUE
      WRITE(6,107)
107    FORMAT('1',T2,'TABELLE DER OPTIMALEN PRODUKTIONSZEITAUFTEILUNG:'/
     *//T6,'PRODUKT',T20,'1',T30,'2',T39,'1-2',T50,'3',T59,'1-3',T70,'4'
     *//T2,'STUNDEN'///)
      DO 16 J=1,180
      WRITE(6,108)J,(IB(I,J),I=1,6)
108   FORMAT((7I10))
16    CONTINUE
      STOP
      END
```

Literaturverzeichnis

Verwendete Abkürzungen:

APF = Ablauf- und Planungsforschung (Operational Research), Langen (Hessen)

MS = Management Science, Journal of the Institute of Management Science, Baltimore, Maryland

OR = Operations Research, The Journal of the Operations Research Society of America, Baltimore 2, Maryland

Ufo = Unternehmungsforschung-Operations Research-Recherche Operationelle, Würzburg

ZfB = Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Wiesbaden

ZfhF = Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, Köln und Opladen

1. Bücher

ABROMEIT,G., Erzeugnisplanung und Produktionsprogramm im Lichte der Produktions-, Absatz- und Wettbewerbspolitik, Wiesbaden 1955

ADAM,D., Produktionsplanung bei Sortenfertigung, Ein Beitrag zur Mehrproduktunternehmung, Wiesbaden 1969

ALBACH,H., Wirtschaftlichkeitsrechnung bei unsicheren Erwartungen, Köln-Opladen 1959

BEA,F.X., Kritische Untersuchungen über den Geltungsbereich des Prinzips der Gewinnmaximierung, Berlin 1968

BELLMAN,R. und DREYFUS,S.E., Applied Dynamic Programming, Princeton New Jersey 1962

BELLMAN,R., Determination of Optimal Trajectories Via Dynamic Programming, in: Optimization Techniques, New York-London 1962

BELLMAN,R., Dynamic Programming,4.Aufl.,Princeton New Jersey 1965

BECKMANN,M., Dynamic Programming of Economic Decisions, Econometrics and Operations Research, Bd.9, Berlin-Heidelberg-New York 1968

BINDLINGMAIER,J., Zielkonflikte und Zielkompromisse im unternehmerischen Entscheidungsprozeß, Wiesbaden 1968

BUSSMANN,K.F., MERTENS,P., Operations Research und Datenverarbeitung bei der Produktionsplanung, Stuttgart 1968

CARR,CH.R.,HOWE,CH.W., Quantitative Decision Procedures in Management and Economics, Deterministic Theory and Applications, New York-San Francisco-Toronto-London 1964

DANTZIG,G.B., Linear Programming and Extensions, Princeton 1963

ELLINGER,TH., Ablaufplanung, Grundfragen der Planung des zeitlichen Ablaufs der Fertigung im Rahmen der industriellen Produktionsplanung, Stuttgart 1959

ELSNER,K., Mehrstufige Produktionstheorie und dynamisches Programmieren, Meisenheim/Glan 1964

FISZ,M., Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, 2. unveränderte Aufl., Berlin 1962

GUTENBERG,E., Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Bd. 1, Die Produktion, 15. Aufl., Berlin-Heidelberg-New York, 1969

GUTENBERG,G., Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Bd. 2, Der Absatz, 11. Aufl., Berlin-Heidelberg-New York 1968

HADLEY,G., Nichtlineare und dynamische Programmierung, in deutscher Sprache herausgegeben von H.P. KÜNZI, Würzburg-Wien 1969

HÄRLE,D., Finanzierungsregeln und ihre Problematik, Wiesbaden 1961

HEINEN,E., Das Zielsystem der Unternehmung, Grundlagen betriebswirtschaftlicher Entscheidungen, Wiesbaden, 1966

HEINEN,E., Einführung in die Betriebswirtschaftslehre, Wiesbaden 1968

HOSS,K., Fertigungsablaufplanung mittels operationsanalytischer Methoden unter besonderer Berücksichtigung des Ablaufdilemmas in der Werkstattfertigung, Würzburg 1965

HOWARD,R., Dynamische Programmierung und Markov-Prozesse. Deutsche Bearbeitung von H.P.KÜNZI und P.KALL, Zürich 1965

JACOB,H., Produktionsplanung und Kostentheorie, in: Zur Theorie der Unternehmung, Festschrift zum 65. Geburtstag von E. GUTENBERG, hrsg. von H. KOCH, Wiesbaden 1962

JACOB,H., Preispolitik, Wiesbaden 1963

JOKSCH,H.CH., Lineares Programmieren, 2.rev. Aufl., Tübingen 1965

KELLERER,H., Theorie und Technik des Stichprobenverfahrens, München 1963

KREYSZIG,E., Statistische Methoden und ihre Anwendungen, Göttingen 1965

KILGER,W., Produktions- und Kostentheorie, Wiesbaden 1958

KOCH,H., Betriebliche Planung, Wiesbaden 1961

KNIGHT,F.H., Risk, Uncertainty and Profit, New York 1964

KÜNZI,H.P., KRELLE,W., Nichtlineare Programmierung, Heidelberg-Göttingen-Berlin 1962

KÜNZI,H.P., MÜLLER,O., NIEVERGELT,E., Einführungskursus in die dynamische Programmierung, Autographie ausgearbeitet von Dr. O. MÜLLER, Schweizerische Vereinigung für Operations Research und Betriebswissenschaftliches Institut der ETH, Berlin-Heidelberg-New York 1968

LANGEN,H., Der Betrieb als Regelkreis, in: Organisation und Rechnungswesen, Festschrift für E. KOSIOL zu seinem 65. Geburtstag, hrsg. von E. GROCHLA, Berlin 1964, S. 81 - 100

MELLEROWICZ,K., Die Beziehungen zwischen Produktions- und Vertriebspolitik, in: Sozialokonomie in politischer Verantwortung, Festschrift für Joachim Tibertius, hrsg. von O. TRIEBENSTEIN, Berlin 1964, S. 307-320

MELLEROWICZ,K., Planung und Plankostenrechnung, Bd. 1, Betriebliche Planung, Freiburg 1961

NEMHAUSER,G.L., Introduction to Dynamic Programming, New York, London, Sydney 1966

OPFERMANN,K., Zum Problem der kostenoptimalen Zuverlässigkeit produktiver Systeme, Dissertation, Münster 1968

PACK,L., Die Elastizität der Kosten, Wiesbaden 1966

PFANZAGL,J., Allgemeine Methoden der Statistik, Bd. 2, Berlin 1962

REINERMANN,H., Die optimale Gestaltung der täglichen Arbeitszeit im Industriebetrieb, Dissertation, Wiesbaden 1968

RIEBEL,P., Das Rechnen mit Einzelkosten und Deckungsbeiträgen als Grundlage unternehmerischer Entscheidungen im Fertigungsbereich, Neue Betriebswirtschaft 1961

RUMMEL,K., Einheitliche Kostenrechnung auf der Grundlage einer vorausgesetzten Proportionalität der Kosten zu betrieblichen Größen, 3. durchgesehene und erweiterte Aufl., Düsseldorf 1949

SASIENI,M.,YASPAN,A.,FRIEDMANN,L., Methoden und Probleme der Unternehmensforschung,Operations Research, Herausgeber: H.P.KÜNZI, Würzburg 1967

SEITZ,M., Probleme der betrieblichen Planung bei im Zeitablauf wechselnden Marktverhältnissen, Dissertation, Wiesbaden 1968

SCHMALENBACH,E.,Kostenrechnung und Preispolitik, 7. erw. und verb. Aufl., Köln und Opladen 1956

SCHNEIDER,E., Einführung in die Wirtschaftstheorie, Bd. 2, 11. Aufl., Tübingen 1967

TÖPFER,K., Regionalpolitik und Standortentscheidung, Bielefeld 1969

VAZSONYI,A., Die Planungsrechnung in Wirtschaft und Industrie. Deutsche Übersetzung von Dr. W. RIEDLER, Wien und München 1962

WEHMEYER,J., Die steuerliche Planung der Unternehmung, Düsseldorf 1967

WENTZEL,J.S., Elemente der dynamischen Programmierung, München-Wien 1966

WHITE,D.J., Dynamic Programming, Edingburgh und London, San Francisco 1969

WÖHE,G., Betriebswirtschaftliche Steuerlehre, Bd. 2, zweiter Halbband, Berlin und Frankfurt 1965

2. Beiträge in Zeitschriften

EGERT, PH., Über ein dynamisches Programmierungsverfahren zur Kostenminimalisierung bei vorgegebenen Auftragsstückzahlen, Ufo 1961, S. 111 ff.

EGERT, PH., Stufenprozesse und dynamisches Programmieren, IBM Fachbibliothek Form 78143

EPPEN,G.D., GOULD,F.J., PASHIGIAN,P.B., Extensions of the Planning Horizon Theorem in the Dynamic Lot Size Model, MS 1969, S. 269 - 277

FALKENHAUSEN,H., Der Howard Algorithmus in Dynamic Programming, Prinzip und praktische Anwendung, APF 1963

FERSCHL,F., Grundzüge des Dynamic Programming, Ufo 1959, S. 70 - 80

GUTENBERG,E., Planung im Betrieb, ZfB 1952, S. 699 ff.

HADLEY,G., WHITIN,TH.M., A Family of Dynamic Inventory Models, MS 1962, S. 458 - 469

HEINHOLD,J., Zur dynamischen Optimierung, APF (AKOR) 1968, S. 153 - 164

HOWARD,R., Dynamic Programming, MS 1966, S. 317 ff.

KOCH,H., Zur Diskussion in der Ungewißheitstheorie, ZfhF 1960, S. 49-75

LANDAU,M., Dynamic Programming und ein einfacheres Verfahren, APF (AKOR) 1964, S. 96 - 101

OHSE,D., Lagerhaltungsmodelle für deterministisch schwankenden Absatz, APF (AKOR) 1969, S. 309-322

PLAUT,H.G., Die Grenzplankostenrechnung in der Praxis?, ZfhF 1952, S. 396 - 407

SCHAFFNER,H., Die Deckungsbeitragsrechnung, in: Die Unternehmung 1962, S. 185ff.

SHEPHARD,R.W., Dynamic Programming, Produktionsplanung zum Zweck der Minimierung der Produktions- und Lagerkosten, APF (AKOR) 1964, S. 1 - 25

STAHLKNECHT, P. und GRIMM,G., Anwendung der dynamischen Optimierung auf ein Sorten- und Schichtwechselproblem, APF (AKOR) 1965, S. 364 - 379

WAGNER,H.M. und WHITIN,TH.M., Dynamic Version of the Economic Lot Size Model, MS 1959, S. 89 - 96

WEDEKIND,H., Das dynamische Programmieren als eine Methode zur Auswertung von Verkaufsstatistiken in der Konsumgüterindustrie, ZfB 1966, S. 19 - 28

Lebenslauf

Am 16. 5. 1942 wurde ich als drittes Kind des Kaufmanns Gottfried Schallenberg und seiner Ehefrau Wilhelmine, geb. Determann, in Osnabrück geboren.

Von 1948 bis 1952 besuchte ich die Volksschule und anschließend die Realschule in Lengerich. 1955 ging ich zum Aufbaugymnasium nach Tecklenburg und trat nach dem Abschluß der dritten Klasse in die Wirtschaftsoberschule in Gelsenkirchen ein. Am 17. März 1962 bekam ich das Zeugnis der Reife. Danach begann ich eine kaufmännische Lehre bei der Firma Wilhelm Kanne, Lebensmittelgroßhandlung in Detmold. Am 25. September 1963 erhielt ich den Kaufmannsgehilfenbrief. Anschließend folgte ein 9 semestriges Studium der Wirtschaftswissenschaften an der Wilhelms-Universität in Münster. Am 6. April 1968 legte ich das Examen als Diplom-Kaufmann ab.

Im Sommersemester 1968 begann ich mit der Abfassung dieser Dissertation.